

Calibração Automática de Modelos Tipo Chuva-Vazão Utilizando  
Técnicas de Suavização - Uma Aplicação ao Modelo SMAP-II

Luciene Pimentel da Silva

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DE PROGRAMAS  
DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO  
RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A  
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:



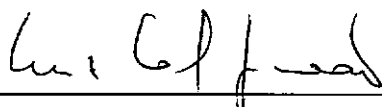
---

Prof. Paulo Canedo de Magalhães, Ph.D.  
(Presidente)



---

Prof. Benedito Pinto Ferreira Braga Jr., Ph.D.



---

Prof. Luiz Carlos Guimarães, Ph.D.

Rio de Janeiro, RJ - BRASIL

JUNHO DE 1990

**Ao Beto, meus pais, e irmãos**

SILVA, LUCIENE PIMENTEL DA

Calibração Automática de Modelos tipo Chuva-vazão  
Utilizando Técnicas de Suavização - Uma Aplicação ao  
Modelo SMAP-II [RIO DE JANEIRO 1 1990

XX, 115 p. 29.7 cm (COPPE/UFRJ), M. Sc., Engenharia  
Civil, 1990

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1 Modelo Chuva-vazão I. COPPE - UFRJ II. Título ( série )

## **Agradecimentos**

Ao orientador Paulo Canedo de Magalhães pela sugestão do tema e a sábia orientação .

Ao co-orientador Adilson Elias Xavier pela inestimável ajuda durante todo o trabalho .

Aos amigos Paulo José, Rogério, Joalza, Ana Paula, Tânia, Luiz, Valéria, Rafael, Rodolfo, Otto, Fernanda, Helena, Juan, Jorge, Simone, Arísio, Daniel e todos do Laboratório de Hidrologia pela amizade, incentivo e companheirismo que me dedicaram todo o tempo .

Aos meus pais pelo carinho que sempre me dedicaram .

Ao Beto pelo companheirismo e compreensão que me dedica todo o tempo .

Resumo da Tese Apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências ( M. Sc. )

Calibração Automática de Modelos Tipo Chuva-Vazão Utilizando  
Técnicas de Suavização - Uma Aplicação ao Modelo SMAP-II

Luciene Pimentel da Silva

Junho de 1990

Orientador : Prof. Paulo Canedo de Magalhães

Programa : Engenharia Civil

Entre as etapas dos processos de simulação hidrológica, a calibração dos parâmetros é uma fase muito importante e também bastante delicada . Com relação aos modelos chuva-vazão, alguns processos para calibração automática por meio de técnicas de otimização têm sido tentados, no entanto, alguns problemas ainda são detectados, e o assunto tornou-se motivo de pesquisa para vários autores . Este trabalho examina a possibilidade de aplicação de métodos de segunda ordem tipo Quasi-Newton para calibração automática de modelos conceituais chuva-vazão . A técnica aqui desenvolvida apresenta uma prévia alteração estrutural de um modelo típico, de maneira a obter a função objetivo de forma única e explícita em relação aos parâmetros . As estruturas tipo patamar limitante que levam à bifurcação de caminhos, geradores de descontinuidades, foram substituídas por funções de suavização, com garantia total da manutenção da integridade física do modelo . O trabalho inclui aplicações em alguns casos de séries sintéticas, e são feitas algumas considerações a respeito de casos reais . Os resultados indicam que um significativo progresso na área de calibração automática de modelos conceituais chuva-vazão foi alcançado . O assunto, no entanto, não fica esgotado, e alguns problemas são identificados para exploração em trabalhos posteriores .

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for degree of Master of Science ( M. Sc. )

Automatic Calibration of Rainfall-Runoff Models Using Smoothing Techniques - An Application to SMAP-II Model

Luciene Pimentel da Silva

June of 1990

Thesis Supervisor : Paulo Canedo de Magalhães

Department : Civil Engineering

Parameter calibration is a critical, but essential step in Hydrologic Modelling . In this way, some optimization algorithms for automatic calibration have been applied to conceptual Rainfall-Runoff modelling, but several problems have been detected, which have motivated many researches . This work examines the possibility of using Quasi-Newton type ( second derivative-based ) optimization algorithm for calibration of conceptual Rainfall-Runoff models . The technique developed presents a previous structural modification of a typical model to obtain the objective function explicit in terms of parameters . The threshold structures that implicate in "if's" structures, generators of discontinuities, were replaced by smoothing functions thereby preserving the conceptual integrity of the model . Application to some syntetic cases were included and considerations were done about real cases . The results indicate that a significant progress was achieved in the area of automatic calibration of conceptual Rainfall-Runoff models . A few problems were identified and can be explored in future researches .

ÍNDICE

<u>CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO</u>	1
<u>CAPÍTULO II - FUNDAMENTOS TEÓRICOS E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</u>	
II.1 - Simulação em Hidrologia	4
II.2 - Modelos Chuva - Vazão	10
II.3 - Calibração Automática de Modelos Chuva - Vazão	13
II.4 - Revisão Bibliográfica	18
<u>CAPÍTULO III - METODOLOGIA</u>	
III.1 - Apresentação do Problema	27
III.2 - O Modelo Chuva - Vazão SMAP - II	28
III.3 - A Reestruturação do Modelo SMAP II Diário	40
III.4 - Aplicação da Técnica de Suavização	45
III.5 - Algoritmo para Resolução do Problema	52
<u>CAPÍTULO IV - APLICAÇÕES E ANÁLISE DOS RESULTADOS</u>	
IV.1 - Séries Sintéticas	71
IV.2 - Considerações sobre casos reais	77
<u>CAPÍTULO V - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS</u>	
V.1 - Conclusões	79
V.2 - Sugestões para Trabalhos Futuros	80
<u>BIBLIOGRAFIA</u>	82
<u>APÊNDICE A - DERIVADAS DAS FUNÇÕES DO MODELO</u>	86
<u>APÊNDICE B - RESULTADOS PARCIAIS</u>	107

LISTA DE FIGURAS

Figura II.1 - O ciclo hidrológico	5
Figura II.2 - A fase da superfície terrestre do ciclo hidrológico	5
Figura II.3 - Os subprocessos da fase terrestre do ciclo hidrológico	6
Figura II.4 - Superfície genérica de uma função de dois parâmetros	17
Figura II.5 - Reservatório típico	24
Figura III.1 - Modelo SMAP II	28
Figura III.2 - Histograma tempo x área	33
Figura III.3 - Fluxograma do modelo SMAP - II	39
Figura III.4 - Primeira alteração do fluxograma	41
Figura III.5 - Segunda alteração do fluxograma	41
Figura III.6 - Terceira alteração do fluxograma	43
Figura III.7 - Última alteração do fluxograma	44
Figura III.8 - Representação gráfica das "FUNC's"	50



Figura III.9 - Representação gráfica das "FUNC's" e da função " $\phi$ " de suavização	50
Figura III.10 - Variação de " $\alpha$ " mantendo " $\lambda$ " constante	57
Figura III.11 - Variação de " $\lambda$ " mantendo " $\alpha$ " constante	58
Figura III.12 - Esquema do programa depois de acoplada a rotina de otimização	70

LISTA DE TABELAS

<b>Tabela IV.1 - Série sintética - Primeira aplicação considerando seis parâmetros</b>	<b>72</b>
<b>Tabela IV.2 - Série sintética - Segunda aplicação considerando seis parâmetros</b>	<b>73</b>
<b>Tabela IV.3 - Série sintética considerando dez parâmetros</b>	<b>73</b>

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Maiúsculas Romanas

A - depois do símbolo da derivada de uma função significa derivada primeira no instante anterior.

ex. DNSOLA - derivada primeira de NSOL no instante anterior (t-1).

ABSI - parâmetro do modelo SMAP-II chamado abstração inicial que representa as perdas iniciais por retenção vegetal e superficial (em depressões do solo).

ABSP - volume disponível para unidade do reservatório que representa a parte superficial do solo no modelo SMAP-II.

B<sub>k</sub> - matriz de aproximação da hessiana no método BFGS.

CHUVA - precipitação média sobre a bacia.

CPER - parâmetro que representa a capacidade de campo no modelo SMAP-II.

D - antes do nome de qualquer função que representa uma variável significa derivada primeira da mesma.

ex. DNSOL - derivada primeira de NSOL.

DFO - derivada primeira da função objetivo.

DEVI - parcela da evapotranspiração não satisfeita do modelo SMAP-II vs. DIB.

DEVP - parcela da evapotranspiração satisfeita do modelo SMAP-II vs. DIB.

DEVR - parcela da evapotranspiração real ocorrida do modelo SMAP-II vs. DIB.

EVPT - evaporação a nível potencial.

EVPTS - parcela a ser evaporada do reservatório do solo no modelo SMAP-II.

F(x) - função objetivo modificada pelo termo de penalização.

F0 - função objetivo.

FUNC1 - função que representa o extravazamento do reservatório do solo no modelo SMAP-II.

FUNC2 - função que representa o cálculo da precipitação efetiva (PEFE) no modelo SMAP-II.

FUNC3 - função que representa o cálculo da evaporação potencial no modelo SMAP-II.

FUNC4 - função que representa a parcela não satisfeita da evaporação a nível potencial no modelo SMAP-II.

FUNC5 - função que representa o nível do reservatório do solo depois de retirada a parcela de evaporação no modelo SMAP-II.

FUNC6 - função que representa a parcela disponível no reservatório do solo para percolação para o aquífero no modelo SMAP-II.

K - parâmetro de recessão do reservatório típico.

KARM - parâmetro do modelo SMAP-II que representa os efeitos de amortecimento por armazenamento na calha.

KPER - parâmetro que representa o coeficiente de recarga para o reservatório subterrâneo no modelo SMAP-II.

KSUB - parâmetro do modelo SMAP-II que representa o coeficiente de recessão do reservatório subterrâneo.

KSUP - parâmetro do modelo SMAP-II que representa o coeficiente de recessão do reservatório da superfície.

M - capacidade máxima do reservatório típico.

NPER - nível mínimo retido por capilaridade no reservatório do solo no modelo SMAP-II.

NP - número de ordem dos parâmetros do modelo SMAP-II (ABS1:1, KSUP:2, ...).

NSAT - parâmetro do modelo SMAP-II que representa a capacidade máxima do reservatório do solo.

NSOL - nível do reservatório que representa a camada superior do solo no modelo SMAP-II.

NSOLES - atualização parcial do nível do reservatório do solo.

NSOLP - atualização parcial do nível do reservatório do solo.

NSOLPP - atualização parcial do nível do reservatório do solo.

NSUB - nível do reservatório subterrâneo no modelo SMAP-II.

NSUBP - atualização parcial do nível do reservatório subterrâneo.

NSUP - nível do reservatório da superfície do modelo SMAP-II.

NSUPP - atualização parcial do nível do reservatório da superfície do modelo SMAP-II.

P(...) - função penalidade.

PEFE - precipitação efetiva.

PINF - parcela da precipitação que vai para o reservatório do solo no modelo SMAP-II vs. DIB.

QCAL - vazão gerada pelo modelo SMAP-II depois de considerada a superposição dos efeitos de amortecimento devido ao translado da massa líquida pelo canal e pelo armazenamento na calha.

QENT - vazão gerada pelo modelo SMAP-II depois de considerado o efeito de amortecimento devido ao translado da massa líquida pelo canal.

QGER - vazão gerada pelo modelo SAMP-II antes de considerar os efeitos de amortecimento.

QINF - parcela da precipitação disponível para o reservatório do solo no modelo SMAP-II.

QPER - vazão de recarga para o reservatório subterrâneo no modelo SMAP-II.

QRES - volume de contribuição da precipitação para o reservatório da superfície no modelo SMAP-II.

QSUB - parcela da vazão gerada pelo modelo SMAP-II proveniente do reservatório subterrâneo.

QSUP - parcela da vazão gerada pelo modelo SMAP-II proveniente do reservatório da superfície.

R<sub>t</sub> - vazão de transbordamento do reservatório típico.

S<sub>t</sub> - vazão de saída inferior do reservatório típico.

TSOL - taxa de umidade do reservatório do solo no modelo SMAP-II vs. DIB.

VTDH - ordenada do histograma de retardo da bacia.

Z<sub>t</sub> - vazão total de saída do reservatório típico.

### Minúsculas Romanas

d - parâmetro da função de suavização.

g<sub>k</sub> - valor do gradiente na iteração k na rotina BFGS.

g<sub>i</sub>(x) - restrições impostas aos parâmetros do modelo SMAP-II.

m - número de restrições.

nobs - número de observações.

ntdh - número de ordenadas do histograma de retardo.

s<sub>k</sub> - variação incremental no ponto x<sub>k</sub>.

t - instante de tempo.

$u_t$  - entrada no reservatório típico proveniente da chuva ou de outros reservatórios no instante  $t$ .

$x_t$  - nível do reservatório típico no instante  $t$ .

$y_k$  - variação do gradiente entre os pontos  $x_k$  e  $x_{k+1}$ .

### Maíúsculas Gregas

$\phi(\dots)$  - função aplicada para suavização do modelo SMAP-II.

$\nabla f(x)$  - vetor gradiente (derivadas primeiras).

$\nabla^2 f(x)$  - matriz hessiana (derivadas segundas).

### Minúsculas Gregas

$\alpha$  - ângulo formado entre a abscissa e a assíntota à função penalidade.

$\lambda$  - parâmetro da função penalidade.

$\rho$  - passo a ser dado numa determinada direção no algoritmo de busca BFGS.



## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

A hidrologia trata da ocorrência, circulação, distribuição, propriedades químicas e físicas da água e seu relacionamento com os seres vivos.

Quando estes conceitos são transportados para a engenharia civil, os estudos de hidrologia servem de elo entre a natureza e as obras de engenharia que envolvem o uso da água, cabendo ao especialista desta área quantificar certos valores notáveis e analisar o comportamento da água na natureza durante todo o processo de circulação, chamado ciclo hidrológico.

A complexidade do ciclo hidrológico, que nada mais é, do que um subprocesso dos fenômenos naturais, motivou vários estudos, seja por modelagem física de protótipos, ou pelo estabelecimento de modelos matemáticos, que são puramente um conjunto de equações matemáticas, elaboradas para representar os diversos fenômenos físicos ligados ao ciclo hidrológico.

Neste contexto apareceu uma classe notável de modelos matemáticos, chamados modelos conceituais chuva-vazão, que representam os subprocessos do ciclo hidrológico envolvidos na transformação da chuva em vazão escoada através de canais naturais ou rios . Este resultado encontra aplicação em diversos tipos de estudos para obras de engenharia . Como exemplos pode se citar : extensão das séries históricas de vazão (de uma forma geral os dados históricos de chuva são mais longos que os de vazão), obras de hidrelétricas, controle de enchentes, dimensionamento de estruturas hidráulicas, entre outras .

Na etapa de elaboração do modelo matemático, onde as equações que representam os fenômenos físicos são estabelecidas, aparecem certas variáveis associadas às características físicas do local, chamadas parâmetros . A determinação destes valores é uma etapa complexa e de grande relevância na fase de simulação .

Nesta fase, chamada de calibração do modelo, o objetivo é a determinação dos parâmetros que fazem o modelo melhor representar o que de fato ocorreu na natureza.

A calibração do modelo pode ser feita através de métodos de tentativa e erro, calibração automática ou, até mesmo, com uma combinação destas duas técnicas.

Os métodos de calibração automática utilizam técnicas de otimização matemática que buscam, a partir de valores iniciais fornecidos para os parâmetros, o conjunto de valores ideal, usando como base a análise do comportamento da função objetivo, previamente estabelecida.

Na combinação das duas técnicas o operador promoveria um ajuste prévio dos parâmetros segundo sua experiência e posteriormente promoveria um ajuste "fino" dos parâmetros.

As técnicas matemáticas de otimização mais sofisticadas envolvem o uso de derivadas, porém até o momento a aplicação destes algoritmos à calibração automática de modelos chuva-vazão tem tido certas limitações .

Em HENDRICKSON, SOROOSHIAN E BRAZIL (1988) E ROTUNNO (1989) são apresentadas pesquisas bem detalhadas a respeito dos diversos problemas encontrados, apontando como principal as estruturas condicionais que levam às descontinuidades nas derivadas da função .

Neste trabalho é apresentada uma técnica de suavização das funções representativas destas estruturas condicionais com manutenção total da integridade física do modelo .

Aplicou-se esta técnica a um modelo típico chuva-vazão, SMAP-II, DIB (1986) e posteriormente procedeu-se à calibração do modelo já suavizado através de uma rotina de otimização que se utiliza das informações das derivadas.

Este trabalho se encontra organizado da seguinte maneira . No capítulo dois é apresentada uma revisão nos tópicos teóricos que envolvem o assunto de calibração automática e uma revisão na bibliografia publicada no assunto . No capítulo três é apresentada a metodologia desenvolvida . No capítulo quatro são apresentados os resultados . E no capítulo cinco são apresentadas as conclusões e sugestões para futuras pesquisas . Finalizando, foi incluída a bibliografia e dois apêndices(A e B), onde são apresentados respectivamente o processo de derivação da função objetivo com relação a cada parâmetro e os resultados parciais das aplicações mostradas no capítulo quatro .

## CAPÍTULO II

### FUNDAMENTOS TEÓRICOS E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

#### II.1 - SIMULAÇÃO EM HIDROLOGIA

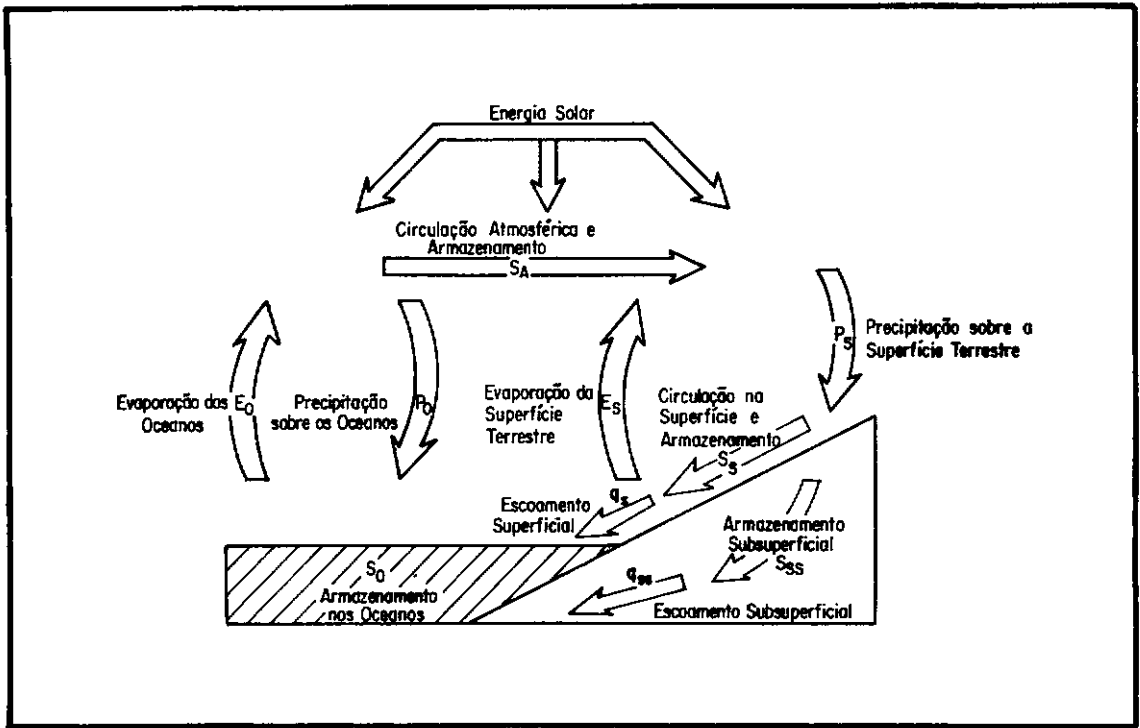
Simular significa representar o comportamento, bem como avaliar certos fenômenos, de um determinado sistema através da utilização de um modelo . No que diz respeito à hidrologia, este sistema é o próprio comportamento e a ocorrência da água na natureza .

O comportamento natural da água quanto suas ocorrências e circulação pode ser bem representado através da compreensão do ciclo hidrológico . A figura (II.1) mostra um esquema genérico deste ciclo .

De forma simplificada pode-se dividir este ciclo em três fases principais : atmosfera, superfície terrestre e oceanos .

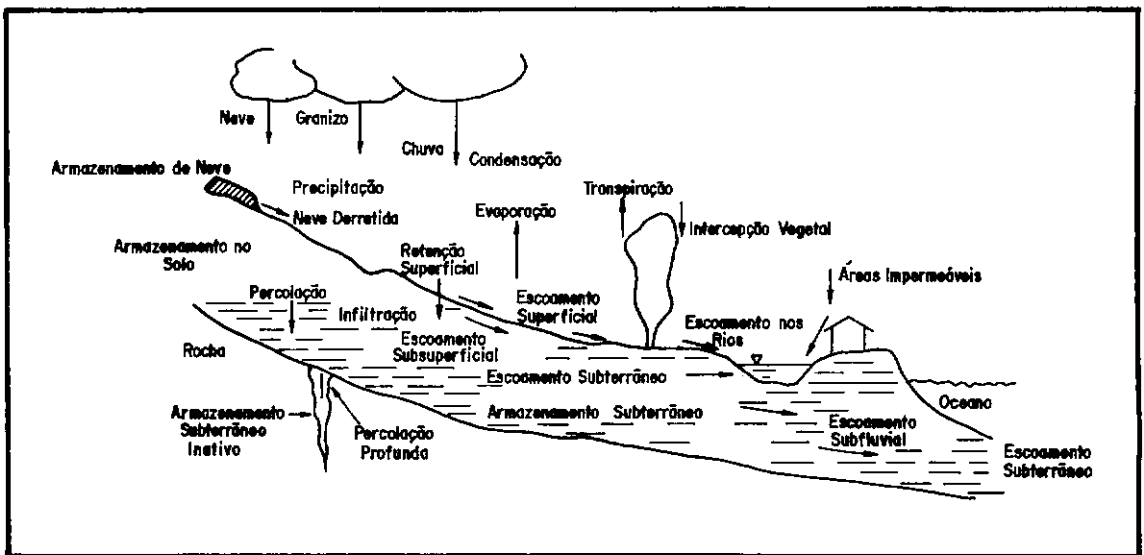
Basicamente, a fase de interesse é a de quantificar e analisar o comportamento da água quando esta atinge a superfície terrestre, não significando, que o hidrólogo não precise compreender os processos envolvidos nas outras fases, mesmo porque, estas fases não são independentes entre si .

As figuras (II.2) e (II.3) mostram esquemas do ciclo da água na fase da superfície terrestre .

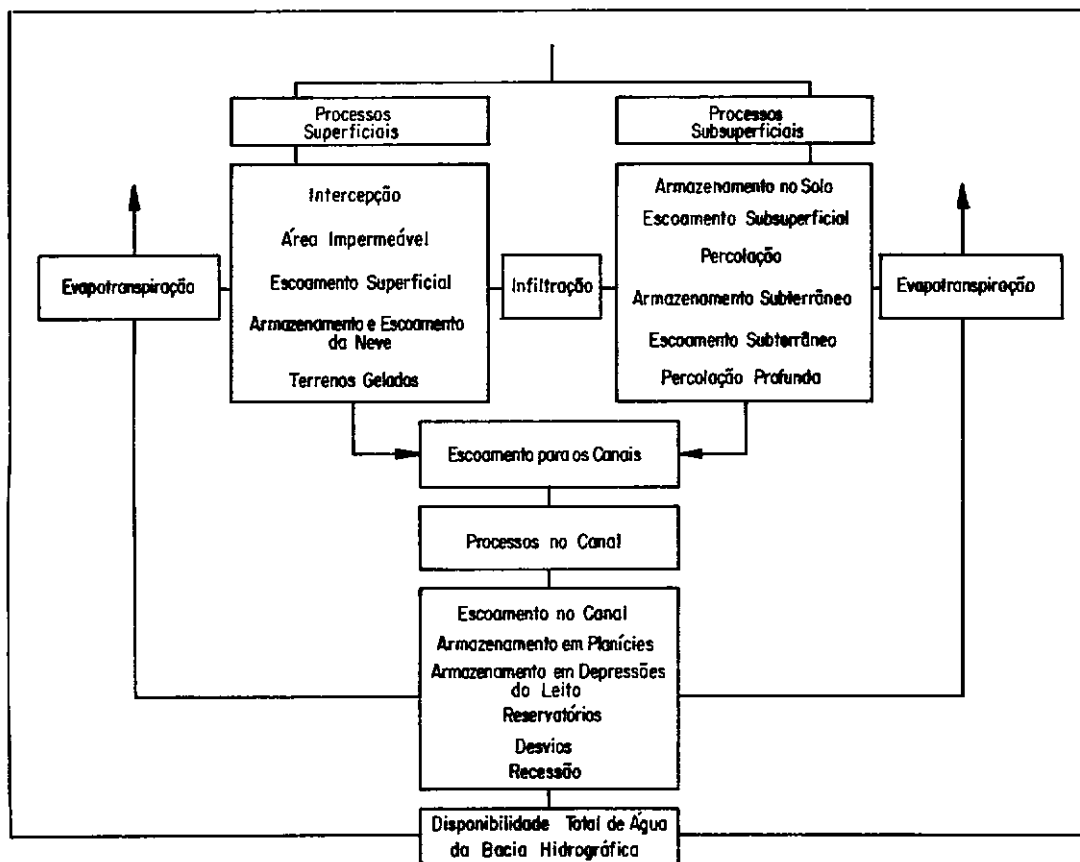


**Figura (II.1) - O CICLO HIDROLÓGICO**

fonte: FLEMING (1975)



**Figura (II.2) - A FASE DA SUPERFÍCIE TERRESTRE DO CICLO HIDROLÓGICO - fonte: FLEMING (1975)**



**Figura (II.3) - OS SUBPROCESSOS DA FASE TERRESTRE DO CICLO HIDROLÓGICO - fonte: FLEMING (1975)**

De uma forma geral, existem três tipos de modelos : analógicos, físicos e matemáticos .

Os analógicos procuram equivalências entre sistemas mecânicos ou elétricos com os fenômenos em estudo . Os modelos físicos, procuram a construção de protótipos em escalas reduzidas, com base nos conceitos de semelhança . E os matemáticos, representam o fenômeno físico através de equações matemáticas.

### Classificação dos modelos matemáticos

Na literatura várias formas de classificação dos modelos matemáticos são apresentadas . CLARKE (1973) apresenta a seguinte :

1. Estocásticos - Conceituais
2. Estocásticos - Empíricos
3. Determinísticos - Conceituais
4. Determinísticos - Empíricos

Com relação à divisão em Estocásticos ou Determinísticos, o autor adota a conceituação dada em CHOW (1964), que definiu que se a aleatoriedade da ocorrência das variáveis é levada em conta e, assim, o conceito de probabilidade é introduzido na formulação do modelo, o processo e o modelo são ditos estocásticos . Por outro lado, se a aleatoriedade da ocorrência das variáveis envolvidas no processo é ignorada, e o modelo segue uma lei rígida muito bem definida, ao contrário do enfoque obedecendo as leis das probabilidades, o modelo e o processo são ditos determinísticos .

Quanto à outra divisão, Conceitual e Empírico, devem ser entendidos como conceitual aqueles que procuram significação em leis físicas para sua formulação . Enquanto os Empíricos são formulados com base na experiência de observação do fenômeno pelo especialista .

Esta classificação deve ser entendida com certa flexibilidade . CLARKE (1973), por exemplo, cita que algumas leis como a de Manning, por exemplo, são estabelecidas com base na observação do fenômeno e portanto, por definição devem ser consideradas como empíricas . No entanto estas equações possuem parâmetros que procuram ter significação física, como é o caso do próprio "n", rugosidade, da equação de Manning .

Outro critério de classificação dos modelos hidrológicos, como é citado em TUCCI (1987), é dividi-los em concentrados e distribuídos . O termo concentrado é atribuído à modelos que não consideram a variação espacial das variáveis, considerando apenas a variação temporal . Nestes modelos os parâmetros que representam as características físicas do local, são únicos para toda área de estudo . Quanto aos distribuídos, representam o local de estudo de forma discreta . Da combinação dos resultados de todos os elementos surge a resposta final do sistema . Neste caso os parâmetros podem variar espacialmente .

#### Etapas no processo de simulação

O processo de simulação pode ser dividido nas seguintes fases : escolha ou formulação do modelo, resolução do modelo, validação e aplicação do modelo .

Na etapa de formulação do modelo o sistema é observado, são feitas as hipóteses básicas e simplificações para a modelagem . Nesta fase são estabelecidas as variáveis do modelo, as equações que representarão os fenômenos que o modelo busca representar e são definidos os parâmetros, ou seja, é feita a especificação do modelo . Muitas vezes esta etapa é suprimida, e são adaptados modelos já existentes às necessidades do estudo em questão .

A etapa de resolução do modelo evolve a solução das equações, ou a solução de um programa de computador, enfim é feito tudo que é necessário para que se obtenha o resultado de saída do modelo .



Com relação aos modelos chuva-vazão, nesta fase, é necessária a determinação dos parâmetros, chamada também de calibração do modelo . Esta etapa é muito importante e dela poderá depender diretamente a qualidade dos resultados finais .

Na fase de calibração do modelo sempre são necessários dados observados, que servirão para comparação com os valores gerados pelo modelo .

Normalmente os modelos são calibrados manualmente (tentativa e erro), utilizando técnicas de otimização (calibração automática), ou pela combinação das duas técnicas .

No método por tentativa e erro, tenta-se descobrir qual o conjunto de parâmetros que mais aproxima valores calculados e observados . Nesta técnica, os resultados estão completamente sujeitos à sensibilidade do especialista . Quando se utiliza calibração automática, primeiramente um critério de quantificação dos desvios é estabelecido, representado na forma de uma função, chamada função objetivo . Com a aplicação de técnicas matemáticas de otimização, busca-se o valor ótimo da função .

Na fase de validação procura-se comprovar o sucesso da metodologia aplicada na modelagem e, quando é o caso, do ajuste dos parâmetros . Verifica-se o funcionamento do modelo para condições diferentes das utilizadas anteriormente, validando o modelo e o ajuste para diferentes condições onde o mesmo será aplicado .

Finalmente, na fase de aplicação, o modelo é aplicado em situações reais, onde se desconhece a saída natural do sistema.

A qualidade dos resultados obtidos através de um processo de simulação, depende do modelo escolhido, da representatividade dos dados de entrada e dos dados utilizados na geração, bem como, do cuidado e da precisão exigida na fase de calibração do modelo .

## II.2 - MODELOS TIPO CHUVA-VAZÃO

Os modelos tipo chuva-vazão simulam os subprocessos do ciclo hidrológico envolvidos na transformação da chuva em vazão escoada através do canal principal da bacia hidrográfica . Permitem reconstruir séries hidrológicas, simular condições críticas e estudar o comportamento dos subprocessos hidrológicos envolvidos.

De uma forma geral, os dados históricos de precipitação são mais longos que os de vazão e com o auxílio destes modelos, após o ajuste dos parâmetros para o período comum de dados, a série de vazões pode ser estendida . Estes resultados são importantes sobretudo, devido a impossibilidade de esperar a coleta de dados com maior amostragem para a elaboração de projetos iminentes .

Com a ocupação desordenada da terra, estes modelos têm ganho grande importância, tanto na avaliação dos efeitos causados por desmatamento e excesso de urbanização da bacia, quanto na avaliação e dimensionamento das obras para atenuação dos problemas decorrentes .

Poderiam ser citadas outras aplicações, mas normalmente estas têm sido as mais importantes dentro da área de engenharia civil .

Os modelos chuva-vazão são classificados como determinísticos e conceituais, ou seja, procuram buscar sempre fundamentos físicos na elaboração das equações, o que nem sempre é possível devido a complexidade dos fenômenos envolvidos .

Em linhas gerais, o processo de modelagem é representado através do balanço hídrico, feito dentro dos princípios de conservação de massa. De forma simplificada, o processo pode ser descrito com início na precipitação, que sofre perdas por retenção vegetal, evaporação e acumulações em depressões no solo . Da chuva que efetivamente chega ao solo, parte infiltrará, e o restante, contribuirá para o escoamento superficial . Da água infiltrada, uma parte ficará retida na zona superficial do solo e o restante percolará através dele, constituindo os escoamentos subsuperficial e subterrâneo . A água que circula no solo poderá ainda sofrer perdas por evaporação . A vazão no ponto de controle da bacia, será resultante, principalmente, do somatório das parcelas provenientes do escoamento superficial, subsuperficial e subterrâneo . A vazão no ponto de controle da bacia são geralmente considerados ainda, os efeitos de amortecimento sofridos na calha, dando como resultado, a hidrógrafa de saída gerada pelo modelo .

Os modelos mais genéricos são conhecidos também, como modelos tipo tanque e simulam os fenômenos através de uma estrutura de reservatórios interligados, que representam os principais subprocessos da parte do ciclo hidrológico de interesse à modelagem . Por possuírem estrutura mais simplificada, são também aplicados no desenvolvimento de técnicas de calibração automática, onde maior enfoque é dado ao processo otimizador .

Nos modelos mais complexos é exigida maior discretização dos dados no tempo . Estes modelos servem para avaliação de variáveis características intermediárias, e à simulação de eventos .

A complexidade dos fenômenos envolvidos no ciclo hidrológico, fez com que os modelos fossem desenvolvidos lentamente, a partir de modelos com estruturas mais simplificadas, e sendo implementados de acordo com as necessidades dos projetos e pesquisas . Assim muitas vezes um mesmo modelo pode possuir várias versões .

Entre alguns dos modelos mais citados na literatura mundial, estão o SSARR ( U.S. Army Corp of Engineers Streamflow Synthesis and Reservoir Regulation ), (1958..1967), SWM ( Stanford Watershed Model ), (1959..1966), HSP ( Hydrocomp Simulation Program ), (1967), Dawdy and O'Donnell, (1965), Boughton, (1966), entre outros .

No Brasil têm sido desenvolvidos alguns modelos, como o COPPE, CANEDO (1974), o IPH, TUCCI (1981), SMAP, LOPES, BRAGA E CONEJO (1981), entre outros .

Na área de modelagem chuva-vazão, uma fase que tem merecido bastante atenção, além do aperfeiçoamento das expressões matemáticas que descrevem o processo, é a de calibração dos parâmetros que aparecem nestas expressões . HENDRICKSON, SOROOSHIAN E BRAZIL (1988) e ROTUNNO (1989) são trabalhos recentemente publicados que abordam o problema .

Isso se deve em parte à interligação entre os dois processos, isto é, o avanço efetivo da representatividade do modelo depende diretamente da garantia da determinação com eficiência dos parâmetros, próprios de cada região .

Assim como em outros tipos de modelos, em geral, os modelos chuva-vazão permitem a calibragem manual e automática .

A calibração automática, embora tenha aplicação discutida por alguns autores, com a alegação de que inibe a sensibilidade do hidrólogo operador, tem sido motivo de vários estudos .

Na verdade, é inegável, que seria de grande utilidade um processo, que sempre de forma eficaz fornecesse os valores dos parâmetros automaticamente, economizando tempo e gasto de um profissional mais especializado . Sem contar a relativa objetividade que este tipo de técnica oferece, já que o operador é de certa forma afastado do processo .

O fato é que muitos problemas ainda são identificados e impedem um avanço efetivo na aplicação das técnicas automáticas . A discussão destes problemas e o estágio atual de pesquisas nesta área são os assuntos dos próximos itens .

Outros modelos, bem como detalhes a respeito deste assunto podem ser vistos em muitos textos, como em FLEMING (1975) .

### II.3 - CALIBRAÇÃO AUTOMÁTICA DE MODELOS CHUVA-VAZÃO

Calibrar um modelo significa determinar o conjunto de valores de parâmetros, que uma vez substituído nas equações do modelo, resultará na melhor aproximação das vazões simuladas às vazões observadas .

Entende-se por um processo automático de determinação dos parâmetros, àquele em que o próprio programa encontra o melhor conjunto de parâmetros segundo determinado critério de comparação .

O critério de comparação é refletido, neste caso, através de uma função, chamada função objetivo, que traduzirá de alguma forma os desvios entre os valores observados e os calculados pelo modelo . A escolha da função objetivo é complexa, feita na maioria das vezes de acordo com os objetivos do projeto em questão, e representa uma área de estudos dentro das pesquisas em otimização . Abaixo são apresentados alguns tipos de funções utilizadas na modelagem chuva-vazão citadas em O'DONNELL E CANEDO (1980), e FLEMING (1975) . Neste trabalho são feitos apenas comentários superficiais sobre alguns dos critérios existentes .

Dentro dos critérios citados, um que encontra grande aplicabilidade, sobretudo em estudos de cheias, é o de minimizar o somatório dos desvios quadráticos entre as vazões observadas e calculadas pelo modelo .

$$FO = \min \sum_{t=1}^{nobs} ( QOBS_t - QCAL_t )^2$$

onde :

FO - função objetivo

nobs - número total de observações utilizadas na calibração

QOBS<sub>t</sub> - vazão observada no instante t

QCAL<sub>t</sub> - vazão calculada pelo modelo no instante t

Quando o objetivo é o ajuste de mínimas, um critério pode ser :

$$FO = \min \sum_{t=1}^{nobs} \left( \frac{1}{QOBS_t} - \frac{1}{QCAL_t} \right)^2$$

Outro critério muitas vezes utilizado, e que também objetiva os valores de maior ordem de grandeza, é o de utilizar uma analogia ao coeficiente de determinação :

$$R^2 = \frac{\frac{1}{nobs} \sum_{t=1}^{nobs} (QOBS_t - \overline{QOBS})^2 - \frac{1}{nobs} \sum_{t=1}^{nobs} (QOBS_t - QCAL_t)^2}{\frac{1}{nobs} \sum_{t=1}^{nobs} (QOBS_t - \overline{QOBS})^2}$$

onde :

$R^2$  - análogo ao coeficiente de determinação e quanto mais próximo de um, melhor o ajuste

$\overline{QOBS}$  - vazão média observada

Um critério que tem a propriedade de indiferença às ordens de grandeza dos valores, pode ser :

$$FO = \min \sum_{t=1}^{nobs} \left( \frac{(QOBS_t - QCAL_t)}{QOBS_t} \right)^2$$

Depois de estabelecida a função (sempre não-linear), o próximo passo na calibração automática seria escolha de uma rotina matemática para otimização da mesma, ou seja, determinação do ponto ótimo, onde o valor da função apresenta o seu mínimo .

De uma forma geral os métodos partem de um ponto inicial dado, e, de acordo com certos critérios que dependem da técnica aplicada, determinam a direção de decréscimo e o passo ideal a ser dado em cada direção .

Os métodos de otimização não-lineares encontram-se em três grandes grupos : busca direta, primeira ordem e segunda ordem .

Nos métodos de busca direta geralmente utilizam-se bases geométricas conjugadas com os valores da função para determinar a direção de decréscimo . Como exemplo de métodos mais aplicados na área de modelagem chuva-vazão podem ser citados : o método de direções rotativas, ROSENBROCK (1960), o método dos poliedros flexíveis, NELDER E MEAD (1965) e o método de busca de trajetórias, HOOKE E JEEVES (1961) .

Nos de primeira ordem utilizam-se os valores da função e de suas derivadas primeiras . O método mais usado é o de direções de máximo declive (steepest descent), onde a direção de decréscimo é a própria direção do vetor gradiente .

Nos de segunda ordem além dos valores da função e do gradiente são considerados também os valores das derivadas segundas . Entre métodos de segunda ordem podem-se destacar o de Newton-Raphson, a família de métodos Quasi-Newton, a de Newton Modificados, a de Direções conjugadas, entre outros .

Na literatura específica de programação não linear, de uma forma geral, os métodos de primeira e segunda ordem têm apresentado melhor desempenho que os de busca direta, o que é natural, já que nestes métodos são levadas em consideração um maior número de informações a respeito do comportamento da função . Esta afirmação, no entanto, não tem sido verdadeira para o caso dos modelos chuva-vazão, e será motivo de discussão mais adiante neste texto .

A figura (II.4), mostra um exemplo genérico do gráfico de uma superfície que representa a função objetivo num caso de dois parâmetros (  $X_1, X_2$  ) .



Observa-se na mesma figura a existência de vários picos (máximos) e vales (mínimos), chamados ótimos locais, espera-se porém que só exista um único ponto de máximo ou mínimo, dito ótimo global .

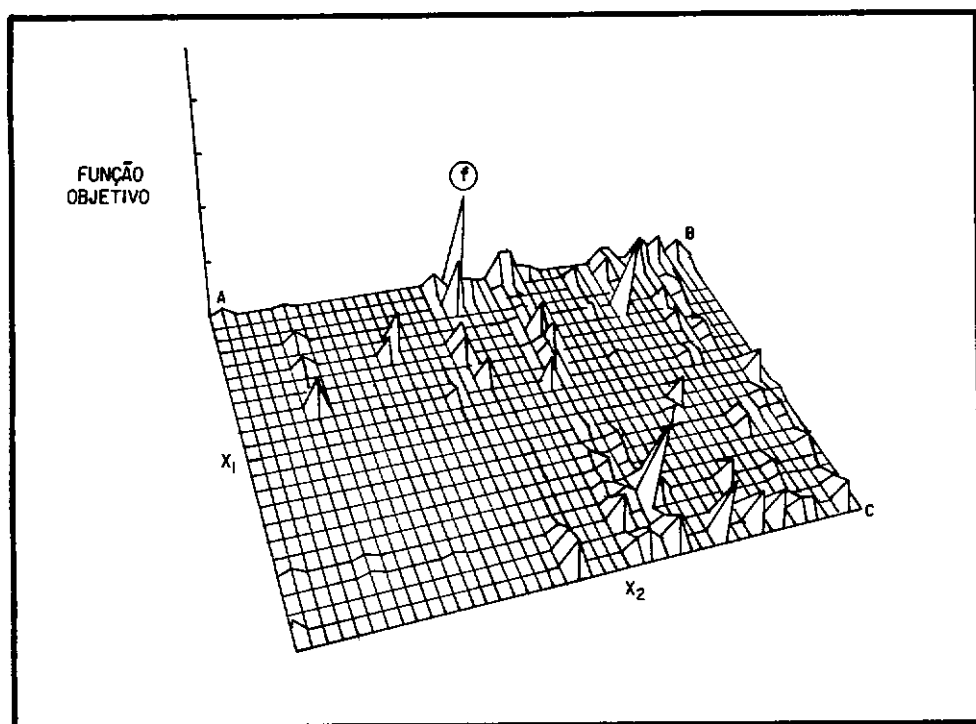


Figura (II.4) - SUPERFÍCIE GENÉRICA DE UMA FUNÇÃO COM DOIS PARÂMETROS - fonte: FLEMING (1975)

Na prática, no entanto, as superfícies geradas pelas funções dos modelos chuva-vazão são bem mais complexas, possuem maior número de parâmetros, incorporam as incertezas dos dados observados, e o problema de ótimos locais representa uma das dificuldades .

Como é afirmado em GUPTA E SOROOSHIAN (1985), atualmente o efetivo avanço na área de modelagem chuva-vazão não é dificultado pela falta de habilidade em representar os processos hidrológicos, e sim, pelas dificuldades na determinação dos parâmetros .

Freqüentemente as rotinas de otimização utilizadas para calibração automática parecem inadequadas, e isso, sem dúvida representa um ponto crítico na calibração automática dos modelos chuva-vazão .

No próximo item, faz-se um breve histórico do que tem sido estudado na área e os principais problemas são discutidos mais detalhadamente .

#### II.4 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Os estudos de aplicação de técnicas de otimização para calibração automática de modelos chuva-vazão, nasceram da necessidade da obtenção de maior objetividade e confiabilidade nos resultados . Nos processos de tentativa e erro, além dos resultados dependerem diretamente da experiência do hidrólogo, o crescimento do nível de detalhamento dos modelos, que conseqüentemente introduziu maior complexidade na estrutura do mesmo, tem tornado a técnica manual muito onerosa .

Com esta motivação o trabalho apresentado por DAWDY E O'DONNELL (1965), mostra a aplicação de uma técnica de otimização matemática para automatizar o processo . Utilizaram para o estudo um modelo tipo tanque de estrutura simplificada, para que fosse dada maior ênfase à análise de sensibilidade dos parâmetros e aos aspectos ligados ao processo de otimização .

Utilizaram como função, a de mínimos quadrados e foi aplicada como rotina otimizadora, o método de busca por direções rotativas, descrito em ROSENBROCK (1960), com algumas alterações . O principal fator que levou à escolha foi o fato de o método pertencer à classe dos métodos de busca direta, não sendo necessária a determinação das derivadas .

Com o objetivo de eliminar os problemas causados por erros provenientes das séries observadas, foi aplicada uma série sintética de vazões . A aplicação de série sintética tem por objetivo testar apenas a rotina otimizadora, já que, o conjunto de parâmetros solução é conhecido e o valor da função objetivo teoricamente deve ser nulo .

No mesmo trabalho foram testados casos partindo-se de pontos iniciais com até 50% de desvio dos parâmetros em relação ao conjunto solução . O processo foi testado considerando nove parâmetros, dos quais sete convergiram para seu valor correto com até 15% de erro, enquanto os outros dois permaneceram significativamente longe de seus valores corretos . Verificando-se que justamente estes dois parâmetros, foram os que apresentaram o menor índice de sensibilidade, quando da análise de sensibilidade de cada parâmetro com relação à superfície de resposta do modelo .

A partir destes resultados os autores sugeriram que um estudo mais aprofundado do assunto fosse feito, testando outros métodos de otimização, matematicamente mais eficazes, e outros tipos de funções objetivo e que fosse testada a sensibilidade dos parâmetros .

Seguindo esta linha, outros autores, como IBBITT E O'DONNELL (1971), GUPTA E SOROOSHIAN (1983), JOHNSTON E PILGRIM (1976), GUPTA E SOROOSHIAN (1985), KITANIDIS E BRAS (1980), HENDRICKSON, SOROOSHIAN E BRAZIL (1988) E ROTUNNO (1989) ,

buscaram a aplicação de outros modelos, outros métodos de otimização na classe dos de busca direta, de métodos de primeira e segunda ordem, além de testar outros tipos de funções objetivo para ajuste, na tentativa de equacionar melhor os problemas a que estão afetos à calibração automática de parâmetros .

Os modelos chuva-vazão aplicados são em geral de estrutura similar ao aplicado em DAWDY E O'DONNELL (1965) . Possuem uma estrutura de reservatórios interligados, que representam a zona superficial, a parte intermediária do solo e o aquífero . Estes modelos embora representem de forma simplificada a fase terrestre do ciclo hidrológico, possuem todas as estruturas típicas dos modelos mais complexos .

Com relação às rotinas de otimização, como já citado anteriormente, os métodos na classe dos de busca direta mais aplicados são : Método de busca por Direções Rotativas, descrito em ROSENBROCK (1960), Busca pelo Algoritmo dos Poliedros Flexíveis, descrito em NELDER E MEAD (1965), e Método de busca de Trajetórias, descrito em HOOKE E JEEVES (1961) .

Na classe de métodos de gradientes, pode-se destacar o método da direção de máximo declive, descrito em muitos textos da literatura .

Entre os de segunda ordem podem ser citados a versão Marquardt do método de Newton, descrito em LEVENBERG (1944) E MARQUARDT (1963), e o método Davidon - Fletcher - Powell, descrito em FLETCHER E POWELL (1963) .

Os métodos de busca direta têm apresentado, de uma forma geral, melhor desempenho . Quando são aplicados métodos que envolvem o uso de derivadas, matematicamente mais eficazes, nem sempre os resultados são bons .

Apesar das tentativas, em trocar as técnicas de otimização, tipo de modelo e função objetivo, as aplicações feitas por estes autores sempre terminaram em algum tipo de fracasso .

Esta afirmação se torna cada vez mais verdadeira, quando da aplicação dos métodos de primeira e segunda ordem . Vários pesquisadores começaram então a explorar mais profundamente o problema através de análises nas superfícies de resposta geradas por estes modelos . Neste aspecto, o estudo apresentado em JOHNSTON E PILGRIM (1976) é de grande valia .

No trabalho é identificada a complexidade da superfície de resposta, com alto grau de não linearidade, múltiplos mínimos locais, regiões de indiferença, vales extensos, fatos que podem levar a um aumento de dificuldade aos processos otimizadores .

No mesmo estudo são descritas como principais dificuldades a serem enfrentadas pelo processo otimizador, as seguintes :

*Interdependência entre os parâmetros* a mudança nos valores de um determinado parâmetro pode ser compensada por alterações em outros . Geometricamente este problema se materializa no aparecimento de longos vales de pouca declividade, fazendo com que alguns métodos, como o da direção de máximo declive fique oscilando em torno da linha de talvegue . Esta dificuldade foi observada também em IBBITT E O'DONNELL (1971) .

*Indiferença no comportamento da função objetivo face a alteração de um determinado parâmetro* - os valores da função objetivo não são alterados face a mudanças nos valores de determinados parâmetros . Geometricamente, o ponto se encontra numa região plana, "como um prato raso", onde os valores dos gradientes são nulos, dificultando a saída destas regiões .

*Definição da direção do gradiente* - no método de direção de máximo declive, onde a direção de decréscimo é definida como a própria direção do gradiente, ou em métodos que utilizam os valores das derivadas, uma definição errônea, pode levar a um fracasso do método . Muitas vezes as derivadas são calculadas numericamente, deixando o problema sujeito à instabilidade numérica .

*Ótimos locais* - este problema não é restrito aos problemas hidrológicos . Na verdade é um problema ainda não superado completamente pelos algoritmos de busca . Um ótimo local é um ponto que atende às mesmas condições exigidas ao global, ou seja, seu valor só não reproduz o menor valor possível da função .

*Escalonamento dos parâmetros* - diferentes escalas dos parâmetros proporcionam formas diferentes da superfície de resposta, que podem facilitar ou dificultar o processo otimizador .

Além destes problemas, foram citados ainda como relevantes as deficiências estruturais na representação através de modelos, que nem sempre representam com precisão a realidade dos fenômenos naturais e a escolha da função objetivo .

De certa forma cada um desses tópicos abordados em JOHNSTON E PILGRIM (1976), foi discutido posteriormente por outros autores na tentativa de encontrar solução para eles e possibilitar a aplicação de métodos de busca mais eficientes tornando a calibração automática dos parâmetros amplamente possível .

Em GUPTA E SOROOSHIAN (1983) e SOROOSHIAN E GUPTA (1985) são abordados os problemas de interdependência e representatividade dos parâmetros . São discutidas técnicas

de reparametrização e reescalonamento, que atenuassem estes problemas . No entanto a solução apresentada é muito particular e não soluciona de forma definitiva as dificuldades que aparecem na calibração automática dos parâmetros .

Com relação a escolha da função objetivo, uma nova forma de abordar o problema foram apresentadas em SOROOSHIAN E DRACUP(1980), SOROOSHIAN (1981), entre outros, como citado em CANEDO (1989), que utilizam elementos da hidrologia estocástica na análise da série temporal de resíduos provenientes da comparação entre as séries de vazões observada e simulada .

O problema da definição das derivadas é discutido amplamente em GUPTA E SOROOSHIAN (1985), HENDRICKSON, SOROOSHIAN E BRAZIL (1988) e ROTUNNO (1989) .

Estes autores derivaram as funções do modelo por seus diversos caminhos analiticamente e de forma recursiva no tempo . Esta abordagem sem dúvida atenua o problema de instabilidade numérica, mas não soluciona os efeitos negativos causados pelas descontinuidades provocadas pela multiplicidade de caminhos .

Em GUPTA E SOROOSHIAN (1985), este problema é discutido com base na apresentação de uma estrutura típica de patamares limitantes .

A estrutura típica de patamares limitantes, que aparecem nos modelos chuva-vazão, levam à multiplicidade de caminhos que são representados nos modelos na forma de estruturas tipo "if's" . A multiplicidade de caminhos leva ao aparecimento de descontinuidades nas derivadas das funções do modelo , que representa uma restrição teórica à aplicação dos métodos de primeira e segunda ordem .

Seguindo o esquema adotado por GUPTA E SOROOSHIAN (1985), a figura (II.5) mostra um componente simples, que representa um reservatório inferior, comum a muitos modelos chuva-vazão. Na sua descrição, são utilizadas variáveis de entrada, de estado do sistema e de saída, a cada intervalo de tempo  $t$ .

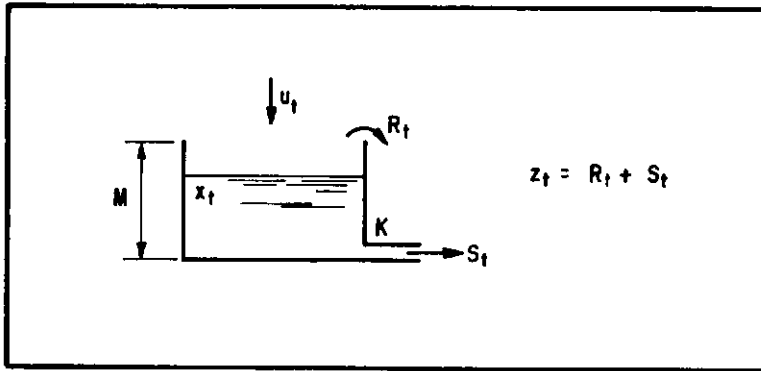


Figura (II.5) - RESERVATÓRIO TÍPICO

O reservatório de capacidade máxima  $M$  apresenta uma saída inferior,  $S_t$ , que é função de  $K$  e de seu nível  $x_t$ , uma saída superior,  $R_t$ , devido ao eventual transbordamento e uma entrada  $u_t$ , proveniente da chuva, ou de reservatórios superiores. Num simples esquema, os dois parâmetros a ajustar são  $K$  e  $M$ . As equações básicas do modelo, descrevem o nível do reservatório e os fluxos de saída a cada instante de tempo :

$$x_t = x_{t-1} + u_t$$

$$R_t = \begin{cases} 0, & \text{se } x_t \leq M \\ x_t - M, & \text{se } x_t > M \end{cases}$$

$$S_t = K (x_t - R_t)$$

$$Z_t = S_t + R_t \quad \text{e} \quad Z'_t = S_t \quad (\text{quando } R_t = 0)$$



A figura (II.6) mostra graficamente o que ocorre .

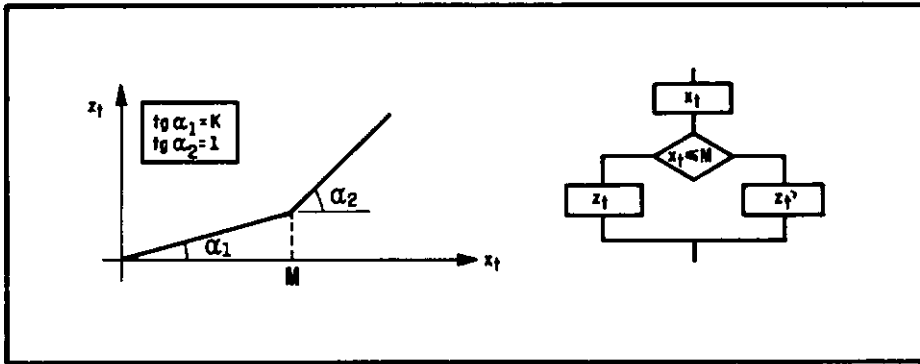


Figura (II.6) - REPRESENTAÇÃO DA FUNÇÃO  $z_t$  E SEU FLUXOGRAMA

A função  $z_t$  embora contínua, apresenta descontinuidade na sua derivada primeira e indeterminação na derivada segunda no ponto  $x_t = M$  .

À medida que se aumenta a complexidade do modelo hidrológico cresce o número de possibilidades distintas de caminhos no fluxograma geral do modelo a cada intervalo de tempo  $t$  .

Assim, um modelo com três patamares limitativos, como o utilizado em GUPTA E SOROOSHIAN (1985), gerariam quatro instâncias de operação .

Cada caminho operativo possui um sistema de equações específico relacionando as variáveis do modelo . Assim, na mudança de caminhos aparecem as descontinuidades indesejáveis mencionadas anteriormente, e que representam uma violação teórica à aplicação dos métodos de primeira e segunda ordem, que exigem continuidade nas derivadas da função objetivo .

ROTUNNO E CANEDO (1987) e HENDRICKSON, SOROOSHIAN E BRAZIL (1988), fizeram uma longa investigação nos processos de otimização, comparando o desempenho dos métodos de busca direta, primeira e segunda ordem, concluindo que provavelmente as descontinuidades são as maiores responsáveis pelo fracasso dos algoritmos que envolvem o uso de derivadas . Atribuem à estas regiões da superfície onde aparecem descontinuidades nas derivadas como uma fonte de problemas . Plotaram os gráficos de variação de cada parâmetro com relação à função objetivo, derivadas primeiras e derivadas segundas . Nestes gráficos tornam-se visíveis estes pontos de singularidade .

Outros autores como RESTREPO-POSADA E BRAS (1982), PICKUP (1977), analisaram profundamente o problema das descontinuidades causadas pelas estruturas típicas de patamares limitantes .

RESTREPO-POSADA E BRAS (1982), como citado em HENDRICKSON, SOROOSHIAN E BRAZIL (1988), substituíram as estruturas que levam às descontinuidades por funções de suavização com forma "S" . Porém estas funções introduziram algumas vezes perturbações nas derivadas e não resolveram completamente o problema .

No próximo capítulo deste texto é apresentada uma metodologia com uma nova abordagem, na qual, o modelo é reestruturado para posteriormente aplicar-se uma técnica de suavização .

## CAPÍTULO III

### METODOLOGIA

#### III.1 - APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Analiticamente, os métodos Quasi-Newton, são os métodos mais sofisticados para os problemas de otimização em espaço irrestrito . Estes métodos mantêm a rapidez dos métodos de Newton e são computacionalmente mais simples .

São classificados como métodos de segunda ordem, pois fazem uso das derivadas segundas, que são aproximadas num processo iterativo a partir das derivadas primeiras .

No caso dos modelos chuva-vazão, o problema das descontinuidades nas derivadas, já mencionado, representa uma restrição teórica à aplicação destes métodos, e podem levar a algum tipo de fracasso, como é registrado em HENDRICKSON, SOROOSHIAN E BRAZIL (1988) e ROTUNNO (1989) .

As descontinuidades surgem devido às estruturas tipo patamar limitante, típica nestes tipos de modelos . Aparecem na formulação dos modelos como "if's", originando vários caminhos, e cada um deles levando a uma formulação diferente para a função objetivo .

O que se imagina neste trabalho é analisar estas estruturas, utilizando um modelo típico, o SMAP II a nível diário e transformar estruturalmente o modelo de forma conveniente a substituir estas estruturas por funções que possibilitem continuidade nas derivadas, sem alterar a integridade física do modelo .

É ideal também que se limite o espaço viável para a otimização, de forma a evitar pontos sem significação física e desastres numéricos .

A seguir faz-se uma descrição do modelo SMAP II e depois, apresenta-se a metodologia aplicada para suavização do modelo .

### III.2 - O MODELO CHUVA-VAZÃO SMAP II

O SMAP, LOPES, BRAGA, CONEJO (1981) é um modelo tipo chuva-vazão, ou seja, a partir da chuva média precipitada sobre uma bacia hidrográfica, o modelo simula os subprocessos do ciclo hidrológico envolvidos na transformação da chuva em vazão escoada através do canal principal . Possui estrutura simples e foi desenvolvido visando a aplicação em locais com dados escassos ou pouco discretizados no tempo .

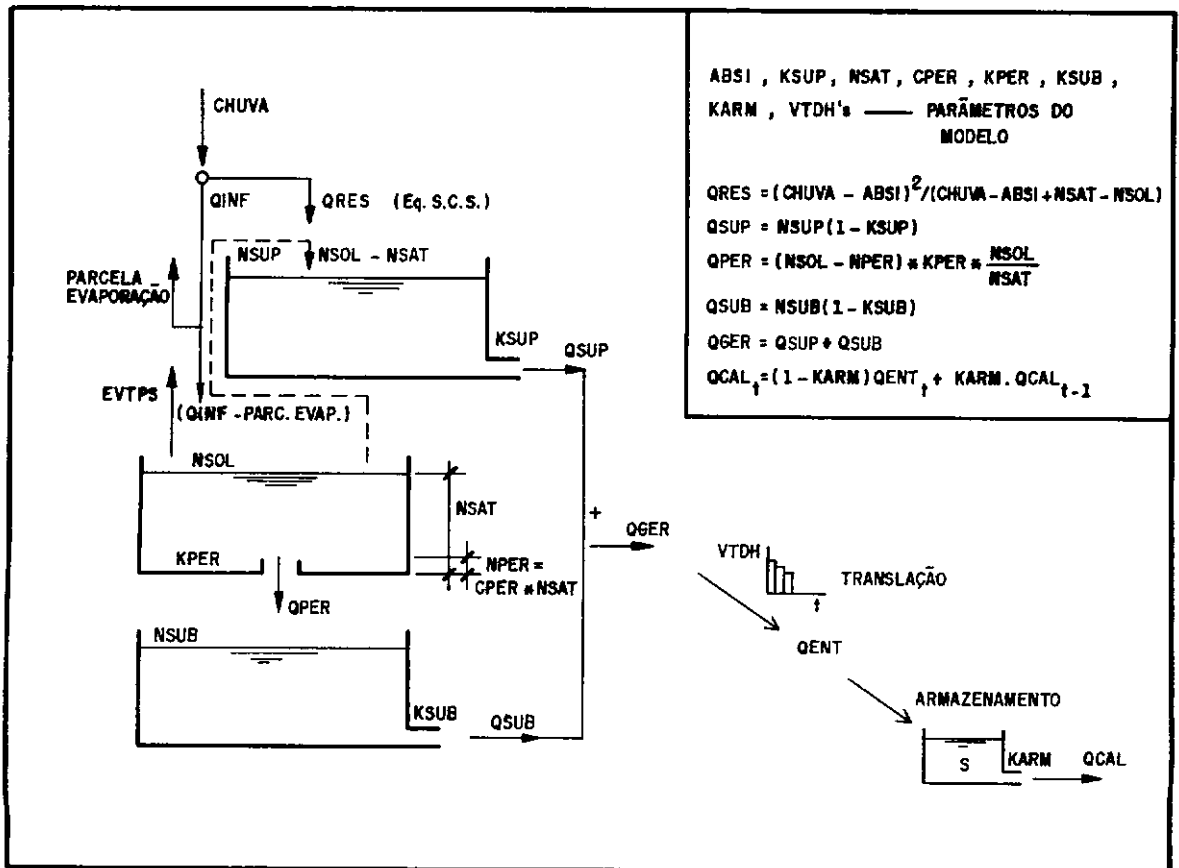


Figura (III.1) - MODELO SMAP II

A versão aqui utilizada, SMAP II, DIB (1986), foi fruto de uma modificação que incluiu os efeitos de calha no modelo original .

O fenómeno natural é representado através de três reservatórios lineares, que representam respectivamente: a superfície, a parte superficial do solo e o aquífero, como mostrado na figura (III.1) .

O balanço de umidade na camada superior do solo, ou seja, a separação da parte da chuva que infiltra e a que contribuirá para o escoamento direto é feita com a aplicação da equação do Soil Conservation Service, descrita em U.S. SOIL CONSERVATION SERVICE (1975), como é citado em DIB (1986) e transcrito a seguir .

$$QRES = \frac{PEFE^2}{PEFE + ABSP} \quad (III.1)$$

onde :

QRES é o volume superficial que gera o escoamento .

ABSP é o volume disponível para umidade do reservatório que representa a parte superficial do solo .

PEFE é a precipitação que chega ao solo e não é retida por depressões nem vegetação (PEFE = CHUVA - ABSI) .

e

CHUVA é a precipitação média sobre a bacia .

ABSI é um parâmetro chamado abstração inicial, que representa as perdas iniciais por retenção vegetal e superficial (por depressões do solo) .

Como  $PEFE = CHUVA - ABSI$ , teremos :

$$QRES = \frac{(CHUVA - ABSI)^2}{CHUVA - ABSI + ABSP} \quad (III.2)$$

onde o valor de ABSP, é ser obtido por :

$$ABSP = NSAT - NSOL \quad (III.4)$$

Então a equação (III.2) do SOIL CONSERVATION SERVICE é reescrita como :

$$QRES = \frac{(CHUVA - ABSI)^2}{CHUVA - ABSI + NSAT - NSOL} \quad (III.5)$$

onde:

QRES - parte da chuva que contribuirá para o reservatório superficial (mm) .

CHUVA - é a precipitação média sobre a bacia (mm) .

ABSI - parâmetro que traduz as perdas por retenção superficial e vegetal (mm) .

NSAT - nível de saturação do solo (mm) .

NSOL - nível do reservatório do solo (mm) .

O valor de QRES foi considerado igual a zero quando CHUVA, precipitação média sobre a bacia, num determinado instante, for menor ou igual a ABSI, parâmetro a ser calibrado, que representa as perdas por retenção vegetal e superficial .

Definida a parcela da chuva que contribuirá para o escoamento direto, o nível (NSUP) do reservatório da superfície é atualizado pelo acréscimo da parcela QRES e, posteriormente, é deplecionado a uma taxa constante (KSUP), fornecendo o escoamento direto (QSUP), dado pela expressão :

$$QSUP(mm/dia) = NSUP(mm) \cdot [1 - KSUP (1/dia)] \quad (III.6)$$

A parcela remanescente ( CHUVA - QRES ) sofre perda por evaporação a nível potencial ( EVPT ), sendo a parcela (QINF - CHUVA - QRES - EVPT ) adicionada ao reservatório do solo.

Se o nível do reservatório do solo depois de acrescentada a parcela QINF for maior que NSAT, o excesso ( NSOL - NSAT ), seria acrescido ao reservatório da superfície para determinação de QSUP, vazão de contribuição proveniente do reservatório da superfície .

Quando a parcela QINF não satisfaz ao potencial de evaporação, haverá uma perda do reservatório do solo (EVPTS) equivalente à parte da evaporação não satisfeita vezes a taxa de umidade do solo ( TSOL - NSOL / NSAT ) .

$$EVPTS = ( EVPT - QINF ) \cdot \frac{NSOL}{NSAT} \quad (III.7)$$

A outra saída do reservatório do solo é a recarga para o aquífero. Nesta fase é utilizado o conceito de capacidade de campo, ou seja, se o nível do reservatório do solo ( NSOL ) for maior que o nível ( NPER ), retido por capilaridade, ocorrerá uma vazão ( QPER ), para recarga do reservatório subterrâneo .

$$QPER = ( NSOL - NPER ) \cdot KPER \cdot \frac{NSOL}{NSAT} \quad (III.8)$$

onde :

. NPER = CPER . NSAT , aonde CPER é o parâmetro capacidade de campo

. KPER - coeficiente de recarga

sendo QPER = 0, quando  $NSOL \leq NPER$

Uma vez determinado o valor de QPER, o nível do reservatório subterrâneo ( NSUB ) é atualizado e a vazão de base ( QSUB ) é determinada deplecionando este reservatório a uma taxa constante ( KSUB ) .

$$QSUB \text{ (mm/dia)} = NSUB \text{ (mm)} \cdot [ 1 - KSUB \text{ (L/dia)} ] \quad (III.9)$$

A soma dos escoamentos direto e básico fornece a vazão no ponto controle da bacia.

$$QGER = QSUP + QSUB \quad (III.10)$$

Que uma vez multiplicada pela constante ( ÁREA DA BACIA [km<sup>2</sup>]/ 86,4) tem seu valor dado em ( m<sup>3</sup>/s ).



Dib (1986), agregou então ao processo o procedimento para modelagem do sistema do canal . Foram considerados os efeitos pelo tempo de traslado da hidrógrafa através do canal principal e o efeito de amortecimento por armazenamento na calha, segundo o modelo idealizado por CLARK (1945) .

Embora estes efeitos ocorram simultaneamente, foi feita a premissa de considerá-los separadamente para a seqüência de resolução .

O efeito de translação da hidrógrafa de entrada é avaliado a partir do histograma de retardo da bacia ou histograma tempo-área . O histograma é construído dividindo-se a bacia a partir de seu ponto de controle através de linhas de igual tempo de percurso até este ponto, ou seja, dividindo a bacia por suas isócronas . Não é muito simples determinar com exatidão as ordenadas do diagrama tempo-área, e é comum que seus valores sejam considerados como parâmetros a calibrar, nos modelos determinísticos chuva-vazão .

A figura (III.2), mostra um exemplo de histograma tempo-área .

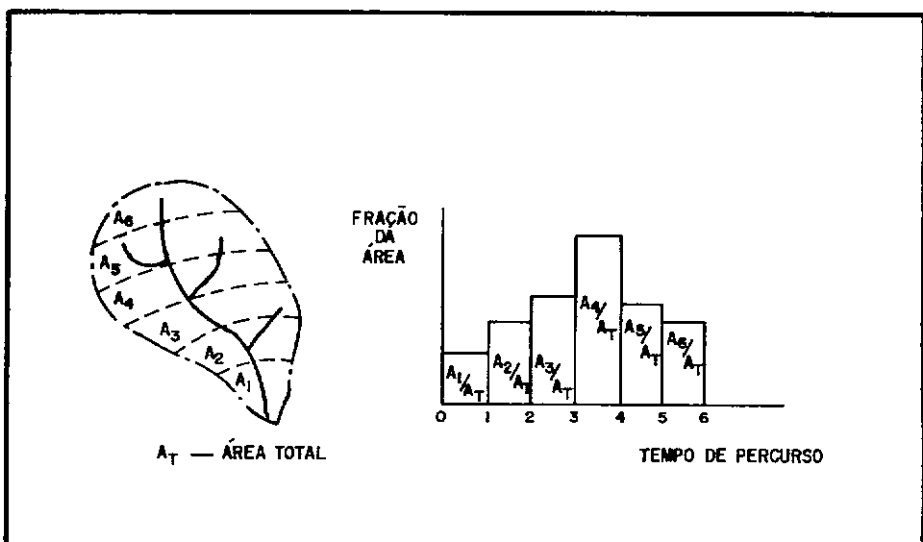


Figura (III.2) - HISTOGRAMA TEMPO  $\times$  ÁREA

A área entre as isócronas é determinada, e as ordenadas do histograma são dadas em frações da área total da bacia . A equação (III.11), dá o valor da vazão já considerado o efeito de translado da massa de água .

$$QENT_t = \sum_{j=1}^{ntdh} QGER_{t-j+1} * VTDH_j \quad (III.11)$$

onde :

$QENT_t$  é a vazão transladada no tempo  $t$  e dada em ( $m^3/s$ ) .

$QGER_{t-j+1}$  é a vazão gerada " $j$ " intervalos de tempo anteriores . E dada também em ( $m^3/s$ ) .

$VTDH_j$  é a ordenada (  $j$  ) do histograma de retardo da bacia, adimensional .

$ntdh$  é o número de ordenadas do histograma de retardo .

O efeito de amortecimento, foi considerado, tal qual, existisse no ponto de controle da bacia um reservatório com armazenamento, tal que :  $QCAL = K.S$ , onde " $QCAL$ " é a vazão de saída, " $S$ " o armazenamento e " $K$ " é a constante de armazenamento . A equação da continuidade aplicada será :

$$\frac{dS}{dt} = QENT - QCAL \quad (III.12)$$

Onde  $QENT$  é a vazão de entrada no sistema .

Como :  $QCAL = K S$

$$\frac{dQCAL}{dt} = K \cdot \frac{dS}{dt} \quad (III.13)$$

Substituindo a equação (III.12) na (III.13), teremos :

$$\frac{dQCAL}{dt} = K ( QENT - QCAL ) \quad (III.14)$$

Considerando :

$$1) \frac{dQCAL}{dt} = \frac{QCAL_t - QCAL_{t-1}}{\Delta t}$$

2) QENT é a vazão transladada no tempo

3) QCAL como a média aritmética entre os QCAL's nos últimos instantes .

$$QCAL = \frac{QCAL_t + QCAL_{t-1}}{2}$$

Substituindo as considerações (1) a (3) na equação (III.14), teremos :

$$QCAL_t = K \cdot \Delta t [ QENT_t - ((QCAL_t + QCAL_{t-1})/2) ] + QCAL_{t-1}$$

$$QCAL_t = K \cdot \Delta t \cdot QENT_t - \frac{K \cdot \Delta t}{2} \cdot QCAL_{t-1} + QCAL_{t-1} - \\ - \frac{K \cdot \Delta t}{2} \cdot QCAL_t$$

$$QCAL_t \cdot [1 + K \cdot \Delta t / 2] = K \cdot \Delta t \cdot QENT_t + QCAL_{t-1} \cdot [1 - K \cdot \Delta t / 2]$$

$$QCAL_t = \frac{K \cdot \Delta t}{1 + K \cdot \Delta t / 2} \cdot QENT_t + \frac{1 - K \cdot \Delta t / 2}{1 + K \cdot \Delta t / 2} \cdot QCAL_{t-1} \\ \hookrightarrow (III.15)$$

$$\text{Fazendo : } \frac{1 - K \cdot \Delta t / 2}{1 + K \cdot \Delta t / 2} = KARM$$

$$\text{E observando que : } \frac{K \cdot \Delta t}{1 + K \cdot \Delta t / 2} = (1 - KARM)$$

A equação (III.15) pode ser reescrita como :

$$QCAL_t = (1 - KARM) \cdot QENT_t + KARM \cdot QCAL_{t-1} \quad (III.16)$$

onde :

KARM é um parâmetro a ser calibrado, que representa os efeitos de amortecimento por armazenamento na calha .

$QENT_t$  é a vazão de entrada no canal dada pela equação (III.11) .

$QCAL_t$  é a vazão de saída, considerando a superposição dos efeitos de traslado da massa líquida pelo canal e o de amortecimento pelo armazenamento na calha .

$QCAL_{t-1}$  é a vazão de saída no instante anterior .

Este conjunto de equações apresentado acima descrevem o modelo SMAP II .

Os parâmetros a serem calibrados são :

ABSI - abstração inicial, representa as perdas por retenção vegetal e em depressões do solo .

KSUP - coeficiente de recessão do reservatório que representa o escoamento superficial .

NSAT - nível de saturação da camada superficial do solo .

CPER - capacidade de campo, coeficiente que dá o percentual de NSAT (NPER), para garantia da manutenção do nível mínimo NPER no reservatório do solo superficial, acima do qual se verifica o fenômeno de percolação .

KPER - coeficiente de recessão do reservatório do solo superficial .

**KSUB** - coeficiente de recessão do reservatório que representa o aquífero .

**KARM** - constante que reflete o percentual de amortecimento devido ao efeito de armazenamento na calha .

**VDH<sub>i</sub>**,  $i = 1, \dots, n_{tdh}$  - ordenadas do histograma de retardo da bacia . Representa o efeito de amortecimento pelo tempo de traslado da massa líquida através do canal principal até o ponto de controle da bacia .

Na versão SMAP II, DIB (1986), foram considerados ainda dois outros parâmetros, SOLI e SUBI, que representam os estados iniciais dos reservatórios do solo e superficial, respectivamente .

Neste trabalho, no entanto, desprezou-se estes dois parâmetros, optando-se pela adoção de um período de aquecimento, a partir do qual as estimativas dos estados iniciais dos reservatórios não influenciam nos resultados .

Este assunto será discutido mais detalhadamente a seguir no capítulo IV deste texto .

A figura (III.3), mostra o fluxograma do modelo SMAP II .

A partir deste fluxograma estudaram-se alterações estruturais com o objetivo de atenuar os problemas de descontinuidades e expressar a função objetivo de forma única, explícita em relação aos parâmetros . Este é o assunto a ser discutido no próximo item .

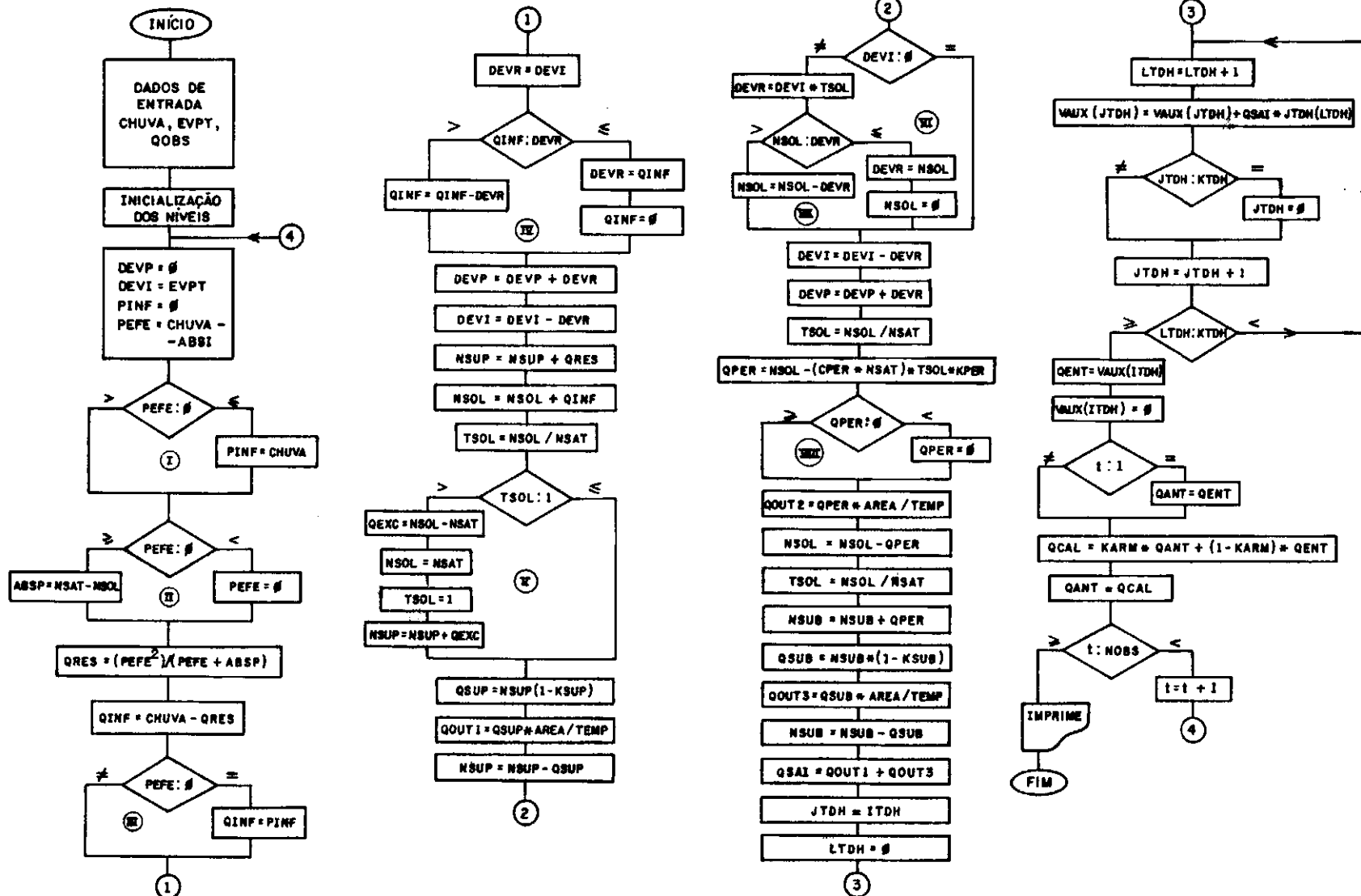


FIGURA (III.3) - FLUXOGRAMA DO MODELO SMAP-II.

### III.3 - A REESTRUTURAÇÃO DO MODELO SMAP II DIÁRIO

Observando-se o fluxograma do modelo SMAP II, apresentado na figura (III.3), pode-se observar uma certa complexidade e a diversidade de estruturas bipartidas.

Estas estruturas são as responsáveis pelo aparecimento de descontinuidades nas funções de derivadas primeiras e indeterminação nas derivadas segundas das equações do modelo.

As descontinuidades nas funções de derivadas levam à informações incorretas fornecidas aos algoritmos que consideram seus valores para determinação das direções de decréscimo, levando ao insucesso quando da aplicação destes algoritmos .

A complexidade na estrutura do fluxograma de resolução do modelo e as próprias estruturas de "IF's", levam à não obtenção de uma função objetivo única, explícita em relação aos parâmetros do modelo e com derivadas primeiras e segundas contínuas .

Desta forma promoveu-se primeiramente uma reestruturação do modelo, visando uniformidade na representação, redução se possível destes caminhos alternativos e indexação de todas as variáveis ao tempo . Estas alterações são mostradas em quatro etapas intermediárias para melhor compreensão do leitor .

Primeiramente, as estruturas I e II do fluxo apresentado na figura (III.3) foram unidas, como é mostrado na figura (III.4) .

A variável PEFE foi tratada dentro da função FUNC2 . Nesta fase, as estruturas " I + II " e III do fluxo apresentado na figura (III.4) foram unidas, passando a ser comparativa



— ANEXANDO ① a ②

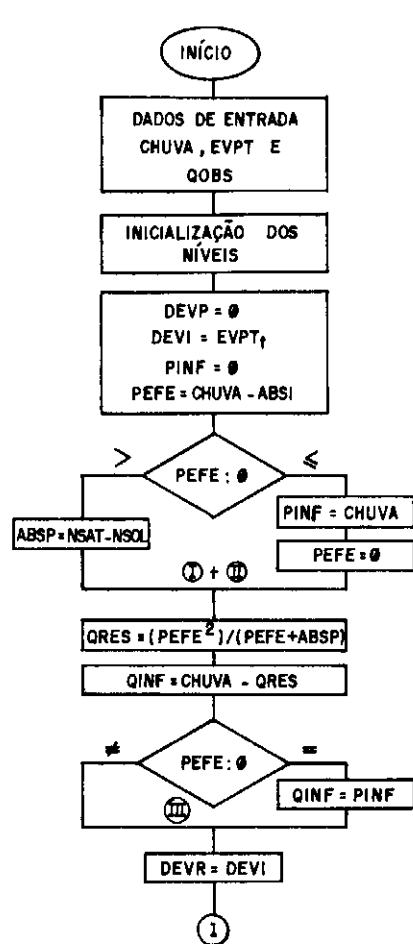


FIGURA (III.4) — PRIMEIRA ALTERAÇÃO DO FLUXOGRAMA

— ANEXANDO (I + II) a III E SUBSTITUINDO A COMPARAÇÃO PEFE: 0, PARA (CHUVA: ABSI), TEREMOS:

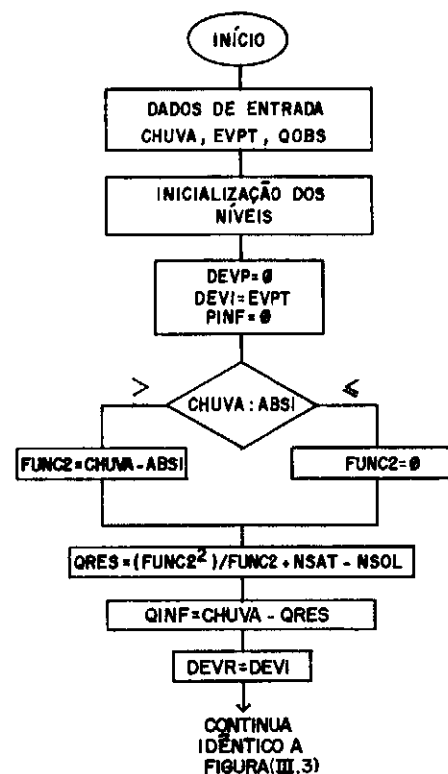


FIGURA (III.5) — SEGUNDA ALTERAÇÃO DO FLUXOGRAMA

entre os valores de CHUVA ( chuva média precipitada sobre a bacia no dia  $t$  ) e ABSI ( parâmetro da abstração inicial ), como é mostrado na figura (III.5) .

Posteriormente, foram eliminadas as variáveis auxiliares : DEVP, DEVI, PINF, DEVR . A estrutura IV, da figura (III.3) passa a ser comparativa entre QINF ( parcela da chuva disponível ao reservatório do solo ) e o próprio valor do potencial de evaporação, EVPT .

Da mesma forma, as estruturas V, VI, VII e VIII, passam a ser comparativas, respectivamente, entre NSOL ( nível do reservatório do solo num determinado instante ) e NSAT ( nível de saturação do solo ); EVPT ( potencial de evaporação no instante  $t$  ) e QINF ( parcela da chuva disponível ao reservatório do solo ); NSOL e EVPTS ( parcela da evaporação potencial não satisfeita ); e, NSOL e NPER ( nível mínimo de água retida no solo ); apresentadas na figura (III.6) . O restante permaneceu inalterado .

Finalmente, o fluxo apresentado na figura (III.7), mostra a estrutura do modelo depois de aplicada a indexação ao tempo de forma recursiva .

Deve ser observado, que as estruturas tipo "IF's" tiveram seus argumentos comparativos alterados, de forma a torná-los todos apresentados de forma bastante semelhante .

Estas estruturas remanescentes foram substituídas por funções peculiares, e que se aplicadas, respondem da mesma forma que o esquema anterior . Estas funções são chamadas de funções de suavização, e suas aplicações são descritas no próximo item .

— ALTERANDO AS ESTRUTURAS IV, V, VI, VII, VIII, DE FORMA A TORNÁ-LAS TODAS ANÁLOGAS TEREMOS

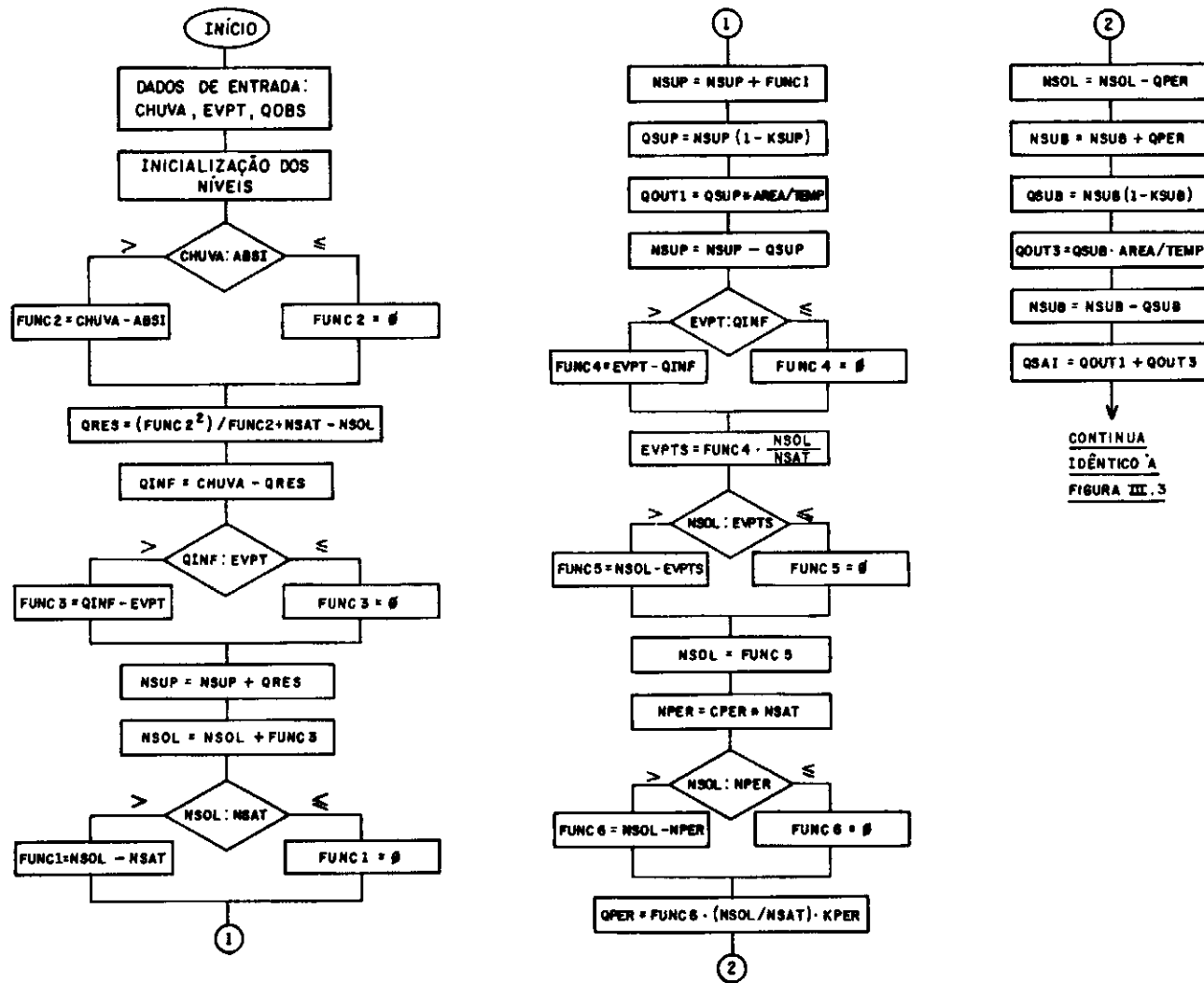


FIGURA (III.6) - TERCEIRA ALTERAÇÃO DO FLUXOGRAMA.

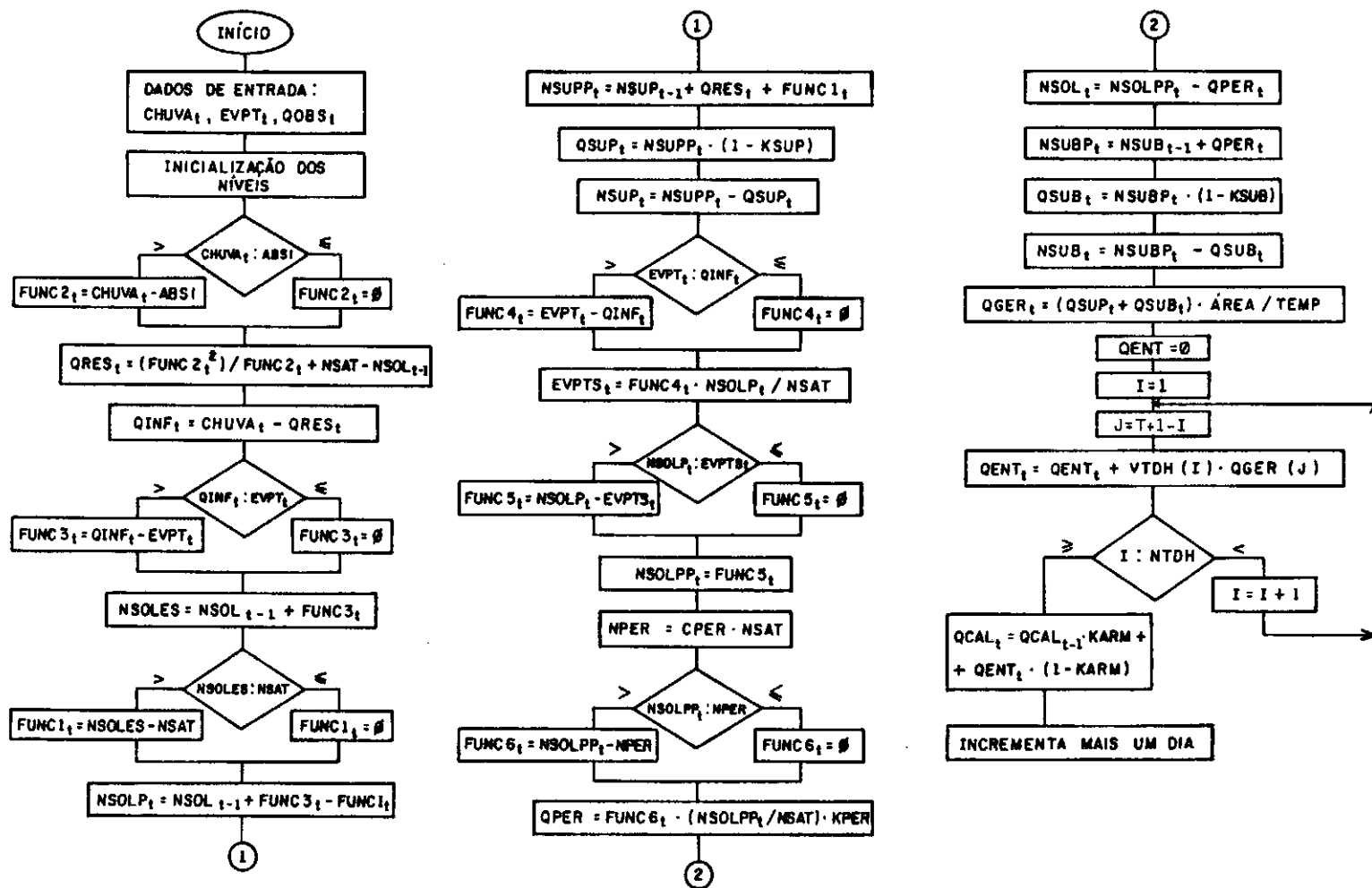


FIGURA (III.7) - ÚLTIMA ALTERAÇÃO DO FLUXOGRAMA.

### III.4 - APLICAÇÃO DA TÉCNICA DE SUAVIZAÇÃO

Depois da reavaliação da estrutura original, o modelo SMAPII pode ser visto agora como o seguinte sistema de equações:

1) Determinação da chuva efetiva :

$$FUNC2_t = \begin{cases} 0, & \text{se } CHUVA_t \leq ABSI \\ (CHUVA_t - ABSI), & \text{se } CHUVA_t > ABSI \end{cases} \quad (III.17)$$

2) Separação do escoamento pela Equação do Soil Conservation Service :

$$QRES_t = \frac{FUNC2_t^2}{FUNC2_t + NSAT - NSOL_{t-1}} \quad (III.18)$$

3) Cálculo da parte disponível à infiltração :

$$QINF_t = CHUVA_t - QRES_t \quad (III.19)$$

4) Permite a evaporação a nível potencial :

$$FUNC3_t = \begin{cases} 0, & \text{se } QINF_t \leq EVPT_t \\ (QINF_t - EVPT_t), & \text{se } QINF_t > EVPT_t \end{cases} \quad (III.20)$$

5) Atualização do nível do reservatório do solo :

$$\text{NSOLES} = \text{NSOL}_{t-1} + \text{FUNC3}_t \quad (\text{III.21})$$

6) Cálculo da parcela que extravaza do reservatório do solo:

$$\text{FUNC1}_t = \begin{cases} 0, & \text{se } \text{NSOLES} \leq \text{NSAT} \\ (\text{NSOLES} - \text{NSAT}), & \text{se } \text{NSOLES} > \text{NSAT} \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

7) Atualização parcial do reservatório superficial :

$$\text{NSUPP}_t = \text{NSUP}_{t-1} + \text{QRES}_t + \text{FUNC1}_t \quad (\text{III.23})$$

8) Cálculo da vazão resultante da contribuição do reservatório da superfície :

$$\text{QSUP}_t = \text{NSUPP}_t \cdot (1 - \text{KSUP}) \quad (\text{III.24})$$

9) Última atualização do reservatório superficial :

$$\text{NSUP}_t = \text{NSUPP}_t - \text{QSUP}_t \quad (\text{III.25})$$

10) Atualização parcial do nível do reservatório do solo :

$$\text{NSOLP}_t = \text{NSOL}_{t-1} + \text{FUNC3}_t - \text{FUNC1}_t \quad (\text{III.26})$$

11) Cálculo da parcela não satisfeita da evaporação potencial :

$$FUNG4_t = \begin{cases} 0, & \text{se } EVPT_t \leq QINF_t \\ (EVPT_t - QINF_t), & \text{se } EVPT_t > QINF_t \end{cases} \quad (III.27)$$

12) Cálculo da parcela a ser evaporada do reservatório do solo :

$$EVPTS_t = FUNG4_t \cdot (NSOLP_t / NSAT) \quad (III.28)$$

13) Permite que ocorra evaporação no reservatório do solo :

$$FUNG5_t = \begin{cases} 0, & \text{se } NSOLP_t \leq EVPTS_t \\ (NSOLP_t - EVPTS_t), & \text{se } NSOLP_t > EVPTS_t \end{cases} \quad (III.29)$$

$$NSOLPP_t = FUNG5_t$$

14) Cálculo da parcela disponível no reservatório do solo para percolação para o aquífero :

$$FUNG6_t = \begin{cases} 0, & \text{se } NSOLPP_t \leq NPER \\ (NSOLPP_t - NPER), & \text{se } NSOLPP_t > NPER \end{cases} \quad (III.30)$$

15) Cálculo da parcela do reservatório que percolará para o aquífero :

$$QPER_t = FUNC6_t \cdot KPER \cdot (NSOLPP_t / NSAT) \quad (III.31)$$

16) Atualização final do reservatório do solo :

$$NSOL_t = NSOLPP_t - QPER_t \quad (III.32)$$

17) Atualização parcial do nível do reservatório subterrâneo:

$$NSUBP_t = NSUB_{t-1} + QPER_t \quad (III.33)$$

18) Cálculo da vazão de contribuição proveniente do reservatório subterrâneo :

$$QSUB_t = NSUBP_t \cdot (1 - KSUB) \quad (III.34)$$

19) Atualização final do nível do reservatório subterrâneo:

$$NSUB_t = NSUBP_t - QSUB_t \quad (III.35)$$

20) Cálculo da vazão gerada pelo modelo :

$$QGER_t = (QSUP_t + QSUB_t) \cdot (AREA \acute{B}ACIA / 86.4) \quad (III.36)$$



21) Cálculo do valor da vazão gerada após aplicação do efeito de traslado da massa líquida :

$$QENT_t = \sum_{j=1}^{j=ntdh} VTDH_j \cdot QGER_{t-j+1} \quad (III.37)$$

22) Cálculo da vazão final gerada pelo modelo já com a superposição do efeito de amortecimento por armazenamento :

$$QCAL_t = KARM \cdot QCAL_{t-1} + (1 - KARM) \cdot QENT_t \quad (III.38)$$

Todas as variáveis  $FUNC_k(t)$ , onde  $k$ , varia de um até seis, mostradas nas equações (III.17), (III.20), (III.22), (III.27), (III.29), e (III.30), representam as estruturas tipo "IF's", que levam às descontinuidades .

A  $FUNC4_t$  mostrada na equação (III.27) poderia ser suprimida e representada por  $(-FUNC3_t)$  apresentada na equação (III.20) . No entanto esta estrutura foi mantida por questões didáticas .

De uma forma geral estas estruturas (FUNC's) podem ser vistas, graficamente, como mostra a figura (III.8) .

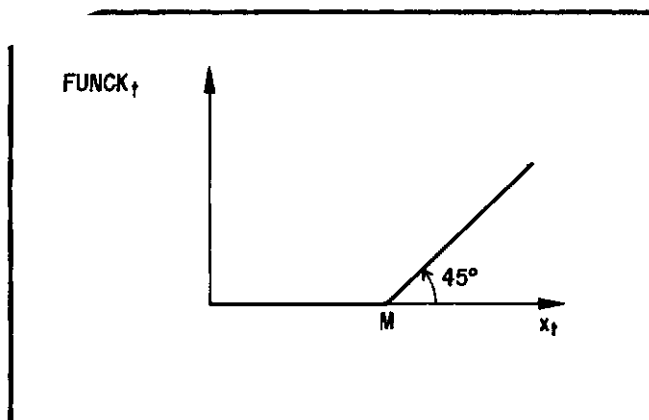


Figura (III.8) - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS "FUNC's"

Onde  $x_t$  nas seis funções corresponde às variáveis  $CHUVA_t$ ,  $QINF_t$ ,  $NSOLES$ ,  $EVPT_t$ ,  $NSOLP_t$  e  $NSOLPP_t$ . E o parâmetro "M" corresponde respectivamente a  $ABSI$ ,  $EVPT_t$ ,  $NSAT$ ,  $QINF_t$ ,  $EVPTS_t$ ,  $NPER$ .

Buscou-se então uma função,  $\phi$ , com certas propriedades favoráveis, que aproximasse a função apresentada na figura (III.8) sem alterar a integridade do modelo.

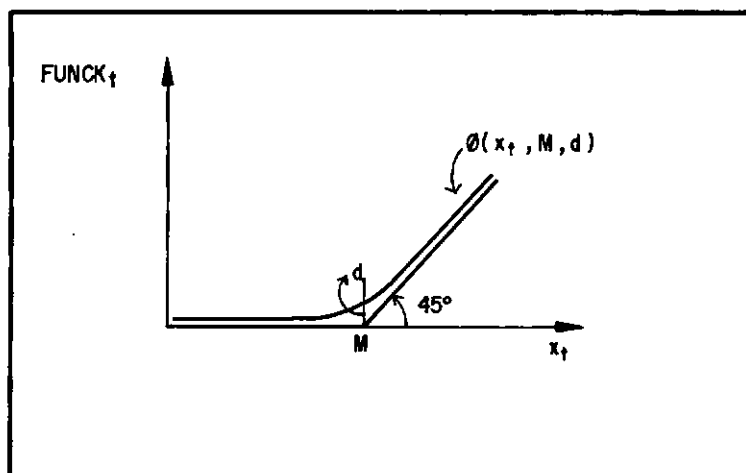


Figura (III.9) - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS "FUNC's" E DA FUNÇÃO " $\phi$ " DE SUAVIZAÇÃO

Para tanto, utilizou-se uma função  $\phi$  definida em XAVIER (1982a) como sendo  $\phi(x_t, M, d)$ , representada na figura (III.9) e expressa por :

$$\phi = \frac{\operatorname{tg}(3\pi/8)}{\operatorname{tg}^2(3\pi/8) - 1} \left[ x_t - M + \sqrt{(x_t - M)^2 + d^2 \frac{[\operatorname{tg}^2(3\pi/8) - 1]^2}{\operatorname{tg}^2(3\pi/8)}} \right]$$

Equação (III.39)

A função  $\phi(x_t, M, d)$  apresenta as seguintes principais propriedades, que são demonstradas em XAVIER (1982b) .

1) A função  $\phi$  é contínua, bem como continuamente diferenciável em  $x_t$ , inclusive em  $x_t = M$ , para  $d > 0$  .

2)  $\phi$  é assintoticamente tangente às retas  $r_1(x_t, M) = 0$  e  $r_2(x_t, M) = (x_t - M)$ , para  $d > 0$  .

3)  $\phi$  é uma função convexa e decrescente para  $d > 0$  e uma função convexa e não crescente para  $d = 0$  .

$$4) \lim_{d \rightarrow 0} \phi(x_t, M, d) = \begin{cases} 0, & \text{se } x_t \leq M \\ (x_t - M), & \text{se } x_t > M \end{cases}$$

A propriedade (1), a diferenciabilidade de primeira e segunda ordem de  $\phi$ , permitirá o uso dos algoritmos que envolvem a aplicação de derivadas .

A (2) sugere que a função  $\phi$  é uma boa suavização para  $\operatorname{FUNC}(x_t, M)$  .

A convexidade, propriedade (3), embora não necessariamente seja passada para a função objetivo, constitui uma característica importante .

A propriedade (4) envolve a variável "d", que representa o maior desvio entre as funções  $\phi$  e  $FUNCK$  . Ela mostra que esta diferença pode ser feita tão pequena quanto se queira, garantindo a integridade física do modelo depois de suavizado .

Mesmo assim, a simulação pelos modelos original e suavizado foi feita durante um período de dois anos e os valores foram iguais com uma boa precisão .

Esta técnica facilita o trabalho de programação e elimina as descontinuidades, que aparecem nas funções de derivadas, possibilitando a aplicação, sem restrições teóricas, de métodos que envolvem a utilização de derivadas para o processo de otimização na calibração automática dos parâmetros .

A seguir, apresenta-se o algoritmo para resolução do problema de calibração dos parâmetros .

### III.5 - ALGORITMO PARA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

A partir do exposto nos itens anteriores, fica claro que a função objetivo pode agora ser expressa de forma explícita e única com relação aos parâmetros do modelo .

Desta forma o problema passa a ser encontrar os valores dos parâmetros para os quais se verifica o valor de mínimo da função .

Foi escolhida como tipo de função a de mínimos quadrados, não existindo nenhum impedimento para que seja feita outra escolha . Assim,

$$FO = \min \sum_{t=1}^{nobs} (QCAL_t - QOBS_t)^2$$

O algoritmo escolhido, apresentado a seguir neste texto se propõe a resolver o seguinte problema :

$$\min f(x)$$

sujeito às condições  $g_i(x) > 0$ ,  $i = 1, \dots, m$

As condições  $g_i(x)$  são as restrições, já mencionadas anteriormente, impostas aos valores dos parâmetros para validar fisicamente o modelo e evitar desastres numéricos no espaço fora do domínio de definição dos parâmetros .

Trata-se então da obtenção da solução do Problema Geral de Programação não linear sujeito à restrições .

No caso do modelo SMAP II, as restrições impostas são as seguintes :

$$1) \quad 0 < ABSI < 10 \text{ mm} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} ABSI > 0 \\ 10 - ABSI > 0 \end{cases}$$

$$2) \quad 0 < KSUP < 1,0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} KSUP > 0 \\ 1,0 - KSUP > 0 \end{cases}$$

$$3) \quad 0 < \text{NSAT} < 1200 \text{ mm} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \text{NSAT} > 0 \\ 1200 - \text{NSAT} > 0 \end{cases}$$

$$4) \quad 0 < \text{CPER} < 1,0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \text{CPER} > 0 \\ 1,0 - \text{CPER} > 0 \end{cases}$$

$$5) \quad 0 < \text{KPER} < 1,0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \text{KPER} > 0 \\ 1,0 - \text{KPER} > 0 \end{cases}$$

$$6) \quad 0 < \text{KSUB} < 1,0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \text{KSUB} > 0 \\ 1,0 - \text{KSUB} > 0 \end{cases}$$

$$7) \quad 0 < \text{KARM} < 1,0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \text{KARM} > 0 \\ 1,0 - \text{KARM} > 0 \end{cases}$$

$$8) \quad 0 < \text{VTDH}_i < 1,0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \text{VTDH}_i > 0 \\ 1,0 - \text{VTDH}_i > 0, \quad i = 1, \dots, \text{nldh} \end{cases}$$

$$9) \quad \sum_{i=1}^{\text{nldh}} \text{VTDH}_i = 1,0$$

A última ordenada de VTDH, não foi tratada como parâmetro a otimizar, e sim como uma função dos outros valores das ordenadas .

$$VTDH_{i=ntdh} = 1,0 - \sum_{i=1}^{(ntdh-1)} VTDH_i$$

Assim a restrição (9) pode ser transformada para :

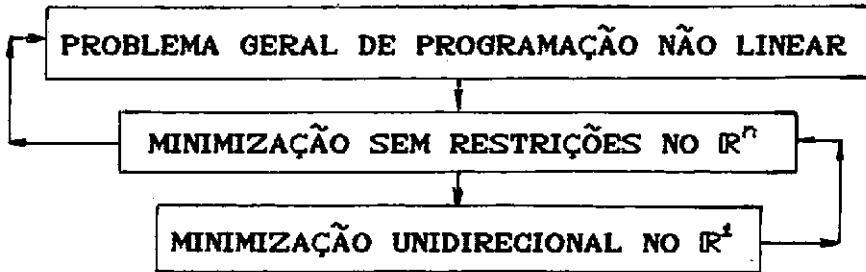
$$\sum_{i=1}^{(ntdh-1)} VTDH_i \leq 1,0$$

$$1,0 - \sum_{i=1}^{(ntdh-1)} VTDH_i \geq 0$$

E parte da restrição (8):  $VTDH_i < 1,0$  pode ser suprimida, por se tornar redundante, já que a restrição  $1,0 - \sum VTDH_i > 0$  garante a observância da mesma .

Esta restrição foi expressa desta forma, apenas para evitar a introdução da restrição de igualdade ao problema, que levaria a um aumento desnecessário da complexidade de resolução do problema, do ponto de vista matemático . Desta forma todas as restrições são de desigualdade .

A solução do problema geral não linear é obtida normalmente segundo a seguinte sequência :



Em cada etapa existem vários algoritmos que podem ser aplicados . Neste trabalho optou-se pela utilização do método das Penalizações Hiperbólicas para tratar o problema geral restrito, pela rotina BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno), tipo Quasi-Newton para a minimização sem restrições e pelo ajuste cúbico para minimização unidirecional . A seguir faz-se a descrição de cada uma dessas etapas .

### O método das Penalizações Hiperbólicas

Este método baseia-se na resolução do problema através de uma modificação da função original . Esta modificação tem por objetivo a transformação do problema restrito original em uma sequência de problemas irrestritos . A modificação da função original é feita através da adição do termo  $P [g_i(x), \alpha, \lambda]$  . A função modificada a ser minimizada é definida como :

$$F(x, \alpha, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m P [g_i(x), \alpha, \lambda] \quad (\text{III.40})$$



Onde  $P$  é a chamada função penalidade e dada por :

$$P = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)-1} \left( -g(x) + \sqrt{g^2(x) + \lambda^2 \cdot \frac{[\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)-1]^2}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)}} \right)$$

$$\alpha \in (0, \pi/2) \quad \text{e} \quad \lambda \geq 0$$

Eq. (III.41)

A idéia geométrica que fundamenta o algoritmo é a seguinte :

1) Inicialmente como mostra a figura (III.10), aumenta-se o ângulo  $\alpha$  da assíntota à função penalidade, provocando, com isto, um significativo aumento da penalização fora da região viável, enquanto que, simultaneamente reduz-se a penalização para pontos dentro da região viável. O processo continua até que se consiga um ponto viável.

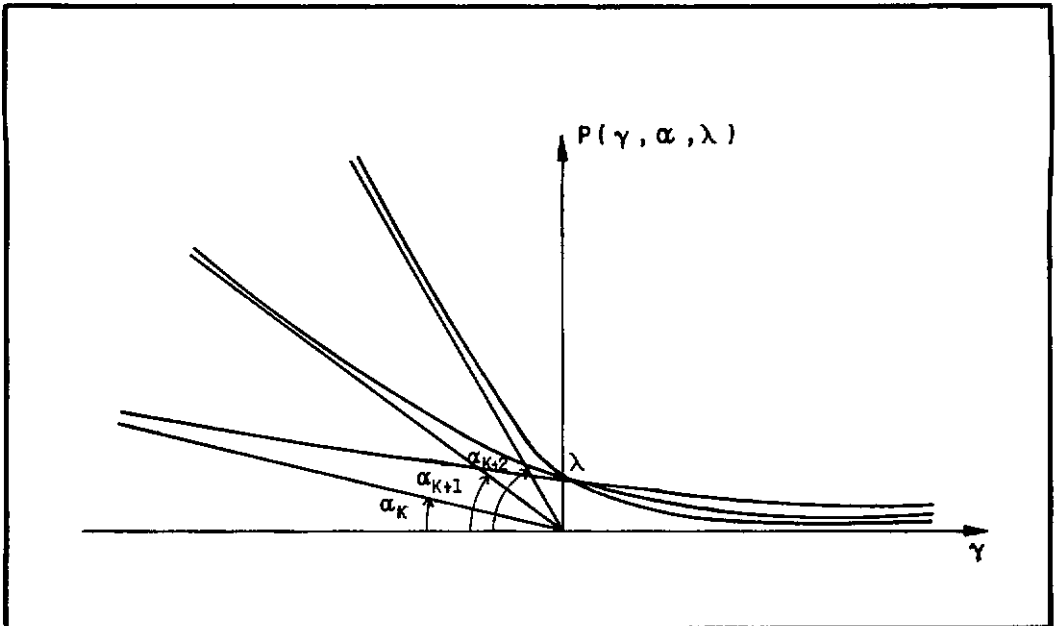


Figura (III.10) - VARIAÇÃO DE " $\alpha$ " MANTENDO " $\lambda$ " CONSTANTE

2) Daí em diante  $\alpha$  é mantido constante e seqüencialmente diminui-se o valor de  $\lambda$ . Desta maneira, a penalização interior torna-se cada vez mais irrelevante, mantendo-se o nível de proibitividade fora da região viável. A figura (III.11), mostra o que acontece nesta segunda fase do processo.

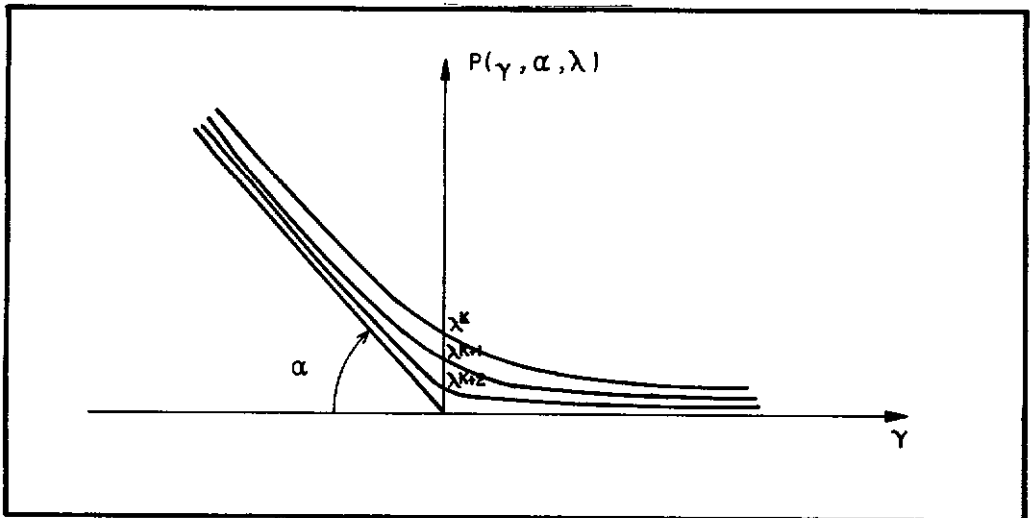


Figura (III.11) - VARIAÇÃO DE " $\lambda$ " MANTENDO " $\alpha$ " CONSTANTE

Abaixo é mostrado o algoritmo geral de resolução :

1) Faça  $K = 0$ ,  $\alpha^1 = \alpha^0$ ,  $\lambda^1 = \lambda^0$ , sendo  $0 < \alpha^0 < \pi/2$  e  $\lambda^0 \geq 0$   
Tome um ponto inicial igual a  $x^0$ .

2) Faça  $K = K + 1$

3) Resolva o problema de minimização sem restrições da função modificada F :

$$F(x, \alpha^k, \lambda^k) = f(x) + \sum_{i=1}^m P [g_i(x), \alpha^k, \lambda^k]$$

A partir do ponto  $x^{k-1}$ , achando o ponto  $x^k$  ótimo.

4) Teste se  $x^k$  é viável

SIM  $\rightarrow$  vá para o passo (6).

$$5) \text{ Faça } \begin{cases} \alpha^{k+1} = \theta \alpha^k + (1 - \theta) \frac{\pi}{2} , & 0 < \theta < 1 \\ \lambda^{k+1} = \lambda^k \end{cases}$$

Vá para o passo (2).

6) Regra de parada - Teste se  $x^k$  é aceitável

SIM  $\rightarrow$  Vá para o passo (8).

$$7) \text{ Faça } \begin{cases} \lambda^k = q \lambda^k , & 0 < q < 1 \\ \alpha^{k+1} = \alpha^k \end{cases}$$

Vá para o passo (2).

8)  $x^k$  é a solução. FIM.

Sendo que para a implementação adotada neste trabalho, os valores do parâmetro  $\alpha$ , figura (III.10) e (III.11), foram considerados constantes, iguais a  $\alpha = \pi / 2,00000005$ , que proporciona uma fortíssima penalização para os pontos fora da região viável .

Uma sequência de problemas irrestritos é gerada pela variação controlada do parâmetro externo " $\lambda$ ", numa sequência convergente a zero, que proporciona a convergência do problema irrestrito ao problema restrito original .

A regra de parada, item (6) do algoritmo de resolução é dada por um valor limite para o parâmetro " $\lambda$ " . Neste trabalho foi utilizado inicialmente um valor da ordem de  $10^{-6}$ , e posteriormente, percebeu-se que o valor de  $10^{-3}$  já era suficiente para que a convergência fosse verificada .

A sequência de problemas irrestritos, item (3) do algoritmo mostrado anteriormente, foi resolvida utilizando um método Quasi-Newton com atualização BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno), descrito a seguir segundo o texto de GILL, MURRAY E WRIGHT (1981) .

#### Método Quasi-Newton - BFGS

Os métodos Quasi-Newton possuem embutidos a lógica dos métodos de Newton . No método de Newton considera-se a aproximação da função por série de Taylor até o termo de segunda ordem .

A aproximação de uma função por série de Taylor no  $\mathbb{R}^1$ , é dada por:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{1}{1!} f'(x) \Delta x + \frac{1}{2!} f''(x) \Delta x^2 + \dots + \\ + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) \Delta x^n + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x+\theta \Delta x) \Delta x^{n+1}$$

sendo  $0 < \theta < 1$

E no  $\mathbb{R}^n$ :

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \langle \nabla f(x), \Delta x \rangle + \frac{1}{2} \langle \Delta x, \nabla^2 f(x), \Delta x \rangle + o(\Delta x^2)$$

$\Delta x \rightarrow x \in \mathbb{R}^n$

onde:

$\nabla f(x)$  é o vetor gradiente no ponto  $x$ .

$\nabla^2 f(x)$  é a matriz de derivadas segundas, conhecida como matriz hessiana.

e:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x) \equiv H(x) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Como no ponto de mínimo o gradiente deve ser nulo, analiticamente teríamos :

$$\nabla F(x+\Delta x) = \nabla F(x) + \langle \nabla^2 F(x) . \Delta x \rangle + 1/2 . \langle \Delta x . \nabla^3 F(x) . \Delta x \rangle$$

Desprezando o termo de terceira ordem e igualando a zero, teríamos :

$$\nabla F(x) + \langle \nabla^2 F(x) . \Delta x \rangle = 0$$

$\langle \nabla^2 F(x) . \Delta x \rangle = - \nabla F(x)$ , que pode ser interpretado como um sistema de equações lineares .

Definindo  $\Delta x = x - x^0$ , a expressão fica da seguinte maneira :

$$x = x^0 - \underbrace{\langle (\nabla^2 F(x^0))^{-1} . \nabla F(x^0) \rangle}_{\text{direção de decréscimo}}$$

Esse é o chamado método de Newton, onde a direção de decréscimo é dada pela direção do gradiente corrigido pela curvatura da superfície de resposta, dada pela matriz hessiana .

A determinação da matriz hessiana ou da sua inversa é sem dúvida complexa e trabalhosa . Os métodos quasi-newton fundamentam-se na teoria de que a aproximação da curvatura de uma função não linear pode ser computada sem a determinação de forma explícita da matriz hessiana .

A matriz hessiana original é tomada como a matriz identidade, e, por aproximações sucessivas por diferenças dos gradientes atualiza-se o valor da matriz . Desta forma surge a chamada condição Quasi-Newton, dada por :

$$B_{k+1} s_k = y_k \quad \text{(III.42)}$$

Onde :

$B_{k+1}$  - aproximação para a matriz hessiana .

$s_k$  - variação incremental no ponto  $x_k$  .

$x_k$  - ponto de partida para o ponto  $x_{k+1}$  através da minimização unidirecional na direção tomada .

$y_k$  - variação do gradiente entre os pontos  $x_k$  e  $x_{k+1}$  .

$$(y_k = s_{k+1} - s_k)$$

A cada passo  $k$ , a matriz hessiana é atualizada pela adição de uma matriz de atualização à anterior .

$$B_{k+1} = B_k + u v^t \quad (III.43)$$

sendo  $u$  e  $v$  vetores quaisquer .

Substituindo a expressão (III.43) na equação da condição Quasi-Newton, (III.42), teremos :

$$B_{k+1} s_k = (B_k + u v^t) s_k = y_k$$

$$u (v^t s_k) = y_k - B_k s_k \quad \text{e} \quad u = \frac{1}{v^t s_k} \cdot (y_k - B_k s_k)$$

Escolhendo para matriz de atualização uma matriz posto um, os vetores  $u$  e  $(y_k - B_k s_k)$  são colineares .

$$B_{k+1} = B_k + \frac{1}{v^t s_k} (y_k - B_k s_k) v^t$$

A matriz hessiana é simétrica, portanto esta propriedade deve ser mantida nas diversas aproximações. Para tal basta que o vetor  $v$  seja múltiplo de  $u$ . Faz-se então :

$$B_{k+1} = B_k + \frac{1}{(y_k - B_k s_k)^t s_k} (y_k - B_k s_k) (y_k - B_k s_k)^t$$

Esta forma de correção da aproximação da inversa da matriz hessiana é chamada de atualização posto um, simétrica.

Desde que só existe uma matriz posto um de atualização, testa-se uma matriz de atualização posto dois, com o objetivo de investigar outras atualizações que mantenham passo a passo a característica de simetria. Uma técnica possível seria :

Dada a matriz  $B_k$  simétrica, definindo  $B^{(0)} = B_k$ ,  $B^{(1)}$ , será dada por :

$$B^{(1)} = B^{(0)} + uv^t$$

Para que a simetria seja passada iteração a iteração deve ser exigido o seguinte :

$$B^{(2)} = \frac{1}{2} (B^{(1)} + B^{(1)t})$$

Esta condição por si só não garante que a condição Quasi-Newton seja mantida para  $B^{(2)}$ . Repete-se então o processo para garantia da condição Quasi-Newton.



Generalizando, podemos ter uma sequência de matrizes de atualização para  $j = 0, 1, \dots$

$$B^{(2j+1)} = B^{2j} + \frac{1}{v^t s_k} (y_k - B^{(2j)} s_k) u^t$$

$$B^{(2j+1)} = \frac{1}{2} (B^{(2j+1)} + B^{(2j+1)t})$$

A sequência  $B^j$  tem limite dado por :

$$B_{k+1} = B_k + \frac{1}{v^t s_k} ( (y_k - B_k s_k)^t v + (y_k - B_k s_k) v^t ) - \\ - \frac{(y_k - B_k s_k)^t s_k}{(v^t s_k)^2} v v^t \quad (III.44)$$

A matriz desta atualização tem posto dois, nela podemos fazer algumas considerações a respeito do vetor  $v$ . Por exemplo, na atualização Powell-Symetric-Broyden (PSB) onde  $v = s_k$  ou, na Davidon-Fletcher-Powell (DFP) onde  $v = y_k$ .

Na atualização Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) são feitas algumas considerações a respeito da atualização (DFP). Assim, quando  $v = y_k$  na equação (III.44), teremos a expressão dada pela equação (III.45).

$$B_{k+1} = B_k - \frac{1}{s_k^t B_k s_k} B_k s_k s_k^t B_k + \frac{1}{v_k^t s_k} y_k y_k^t +$$

$$+ (s_k^t B_k s_k) w_k w_k^t \quad (\text{III.45})$$

$$\text{onde } w_k = \frac{1}{y_k^t s_k} y_k - \frac{1}{s_k^t B_k s_k} B_k s_k$$

Pode ser comprovado que  $w_k$  é ortogonal a  $s_k$ . Assim qualquer multiplicador para a matriz  $w_k w_k^t$  (posto 1) pode ser adicionada a  $B_{k+1}$  sem prejuízo para satisfação da condição Quasi-Newton. Isto leva a uma família de atualizações.

$$B_{k+1}^\phi = B_k - \frac{1}{s_k^t B_k s_k} B_k s_k s_k^t B_k + \frac{1}{y_k^t s_k} y_k y_k^t +$$

$$+ \phi_k (s_k^t B_k s_k) w_k w_k^t$$

$\phi$ , pode variar, algumas pesquisas realizadas levaram a  $\phi_k \equiv 0$ , que leva às atualizações mais eficazes.

$$B_{k+1} = B_k - \frac{1}{s_k^t B_k s_k} B_k s_k s_k^t B_k + \frac{1}{y_k^t s_k} y_k y_k^t$$

Esta é a chamada atualização BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno)

A implementação utilizada desta rotina foi a desenvolvida por M. J. POWELL, HARWELL LABORATORIES, England.

Para utilização do método Quasi-Newton é necessária a determinação dos valores das derivadas primeiras da função objetivo com relação a cada parâmetro .

As derivadas foram determinadas analiticamente e recursivamente no tempo, de forma similar à apresentada em GUPTA E SOROOSHIAN (1985) .

Pela complexidade envolvida na abordagem analítica foi desenvolvida uma rotina para cálculo numérico das derivadas por diferenças centrais com o objetivo de validação das expressões obtidas .

Os valores, se comparados ( analiticamente e numericamente ) foram praticamente iguais com precisão de pelo menos até a sexta casa decimal .

Embora envolva um grande trabalho, a vantagem da determinação das expressões analíticas das derivadas, está no afastamento por completo de qualquer problema de estabilidade numérica devido às acumulações dos erros das aproximações . Essa ocorrência é registrada na literatura em JOHNSTON E PILGRIM (1976) .

O apêndice "A" apresenta as expressões analíticas das derivadas, obtidas de forma recursiva no tempo, a partir das funções do modelo SMAP II .

De forma geral o problema é resolvido segundo o seguinte algoritmo básico :

Problema : Determinar  $x^*$ , tal que  $x^*$ , seja o ponto onde se verifica o mínimo da função  $F(x)$ , que é a função modificada apresentada anteriormente na equação (III.40) .

1) Escolher  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  . Fazer  $i=0$  .

2) Calcular  $x^{i+1} = x^i + \rho \Delta x^i$

onde :

$\Delta x$  é a direção de decréscimo, dada pelo método Quasi-Newton  
 $\rho$  é o passo, deve-se escolher  $\rho^*$ , tal que,  $F(x^{i+1}(\rho^*)) < F(x^i)$   
 (minimização unidirecional)

3) Testar se o ponto  $x^{i+1}$  satisfaz a um conjunto de exigências (regra de parada) .

4) Fazer  $x^{i+1} = x^{i+1}(\rho^*)$  . Fazer  $i = i+1$  .

5) Ir ao passo 2 .

Na versão da rotina BFGS (Broyden-Fletcher-Golden-Shanno), implementada, o critério de parada é dado por :

$$|| x^i - x^{i+1} || < \varepsilon_1$$

onde  $\varepsilon_1$  é dado por  $(\lambda / 10^7)$  .

A minimização unidirecional, feita no item (2), do algoritmo é feita pelo ajuste cúbico descrito a seguir .

### Ajuste Cúbico

A idéia do ajuste cúbico é a de dados dois pontos, ajustar um polinômio de ordem três, e, estimar o ponto de mínimo deste polinômio ajustado .

Dados  $x^i$  e  $x^{i-1}$ , a estimativa para o próximo ponto,  $x^{i+1}$ , é dada pela equação (III.46) .

$$x^{i+1} = x^i - (x^i - x^{i-1}) \left[ \frac{F'(x^i) + u_2 + u_1}{F'(x^i) - F'(x^{i+1}) + 2u_2} \right]$$

(III.46)

onde :

$$u_1 = F'(x^{i-1}) + F'(x^i) - \frac{3F(x^{i-1}) - F(x^i)}{x^{i-1} - x^i}$$

$$u_2 = [u_1^2 - F'(x^{i-1}) F'(x^i)]^{1/2}$$

A figura (III.12) mostra o fluxograma do modelo com a implementação do algoritmo para otimização .

No próximo capítulo são apresentadas algumas aplicações e a análise dos resultados .

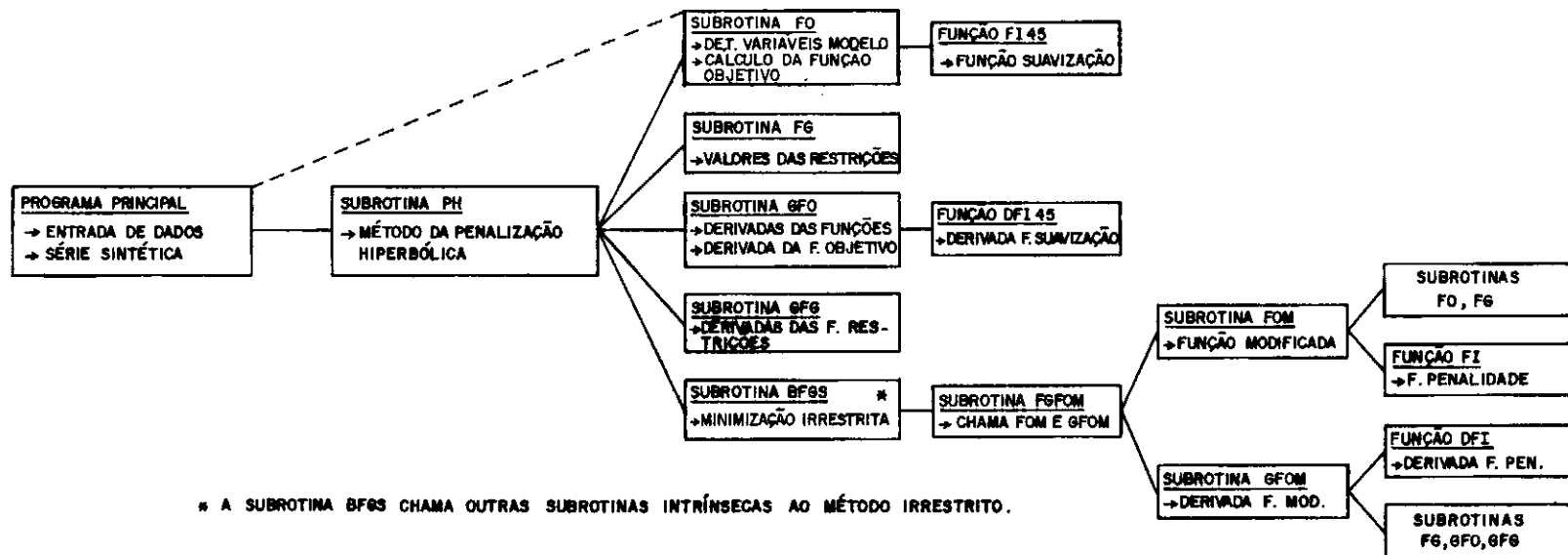


FIGURA (III.12) - ESQUEMA DO PROGRAMA DEPOIS DE ACOPLADA A ROTINA DE OTIMIZAÇÃO.

## CAPÍTULO IV

### APLICAÇÕES E ANÁLISE DOS RESULTADOS

#### IV.1 - SÉRIES SINTÉTICAS

A abordagem em séries sintéticas tem por objetivo o teste da eficácia do algoritmo de otimização, descrito no capítulo anterior . Afastando-se assim todas as outras incertezas, mencionadas no capítulo II, do processo de calibração dos parâmetros do modelo .

Consiste na aplicação do algoritmo de busca, onde o conjunto solução ótimo é previamente conhecido . Tudo se passa como se a natureza se comportasse tal qual o modelo .

A partir dos dados de precipitação e evaporação observados para uma determinada região e um conjunto arbitrado de valores para os parâmetros, gera-se através do próprio modelo uma série de vazões . Posteriormente, partindo-se de um ponto inicial qualquer promovem-se tentativas para calibrar automaticamente o modelo .

O processo otimizador deve ser eficaz o bastante para encontrar o conjunto de parâmetros solução, com os quais a série sintética de vazões foi gerada, com valor para função objetivo nulo .

Neste trabalho, utilizaram-se dados diários de cinco anos de precipitação, evaporação observados da bacia do Rio Fartura, localizada em São Paulo, com 227 Km<sup>2</sup> de área .

A partir destes dados gerou-se através do modelo SMAP II três séries sintéticas distintas . Sendo as duas primeiras levando em consideração apenas seis parâmetros e na última dez parâmetros .

Com relação às condições iniciais optou-se pela consideração de um período de aquecimento, a partir do qual os valores iniciais não influenciam mais nos resultados finais .

No caso de séries sintéticas as condições iniciais certamente não são um fator primordial, por isso, nesta fase, não foi feito nenhum estudo de sensibilidade para o período de aquecimento adotado . Estabeleceu-se arbitrariamente um período de sessenta dias .

As tabelas IV.1, IV.2 e IV.3 apresentam os resultados dessas aplicações e no apêndice B são mostrados resultados parciais .

Tabela (IV.1) - SÉRIE SINTÉTICA - PRIMEIRA APLICAÇÃO  
CONSIDERANDO SEIS PARÂMETROS

PARÂMETROS	SOLUÇÃO	- 10 %		- 20 %		- 30 %		- 50 %		- 75 %	
		P. INICIAL	P. FINAL	P. INICIAL	P. FINAL	P. INICIAL	P. FINAL	P. INICIAL	P. FINAL	P. INICIAL	P. FINAL
ABSI	5,00	4,50	5,0000	4,00	5,0000	3,50	5,0000	2,50	4,9999	1,25	5,0000
KSUP	0,700	0,630	0,6999	0,560	0,6999	0,490	0,6999	0,350	0,6999	0,175	0,6999
NSAT	300,0	270,0	300,0	240,0	300,00	210,0	300,00	150,0	299,99	75,0	300,00
CPER	0,300	0,270	0,3000	0,240	0,3000	0,210	0,2999	0,150	0,2999	0,075	0,3000
KPER	0,0080	0,0072	0,0080	0,0064	0,0080	0,0056	0,0079	0,0040	0,0079	0,0020	0,0080
KSUB	0,9500	0,8550	0,9499	0,7600	0,9499	0,6650	0,9499	0,4750	0,9500	0,2375	0,9499
FO	—	$0,28 \times 10^{-4}$	$0,84 \times 10^{-9}$	$0,12 \times 10^{-5}$	$0,58 \times 10^{-12}$	$0,28 \times 10^{-5}$	$0,16 \times 10^{-11}$	$0,80 \times 10^{-5}$	$0,12 \times 10^{-12}$	$0,18 \times 10^{-5}$	$0,51 \times 10^{-11}$



**Tabela (IV.2) - SÉRIE SINTÉTICA - SEGUNDA APLICAÇÃO  
CONSIDERANDO SEIS PARÂMETROS**

PARÂMETROS	SOLUÇÃO	- 10 %		- 20 %		- 30 %		- 50 %		- 75 %	
		P. INICIAL	P. FINAL	P. INICIAL	P. FINAL	P. INICIAL	P. FINAL	P. INICIAL	P. FINAL	P. INICIAL	P. FINAL
ABSI	8,300	7,470	8,3000	6,640	8,2999	5,810	8,3000	4,150	6,0048	2,075	9,9999
KSUP	0,820	0,738	0,8199	0,656	0,8200	0,574	0,8199	0,410	0,9949	0,205	0,9903
NSAT	760,0	684,0	760,0	608,0	760,00	523,0	760,00	390,0	272,80	190,0	420,78
CPER	0,300	0,270	0,300	0,240	0,2999	0,210	0,3000	0,150	0,0194	0,075	0,6558
KPER	0,0120	0,0108	0,0119	0,0096	0,0119	0,0084	0,0119	0,0060	0,0075	0,0030	0,9999
KSUB	0,9920	0,8928	0,9920	0,7936	0,9919	0,6944	0,9920	0,4960	0,9948	0,2480	0,9958
FO	—	$0,16 \times 10^{-5}$	$0,22 \times 10^{-5}$	$0,25 \times 10^{-5}$	$0,79 \times 10^{-10}$	$0,42 \times 10^{-5}$	$0,23 \times 10^{-14}$	$0,10 \times 10^{-6}$	$2,07 \times 10^{-3}$	$0,26 \times 10^{-6}$	$2,04 \times 10^{-3}$

**Tabela (IV.3) - SÉRIE SINTÉTICA CONSIDERANDO DEZ PARÂMETROS**

PARÂMETROS	SOLUÇÃO	- 10 %		- 20 %		- 30 %		- 50 %		- 50 %		- 75 %		- 75 %	
		P. INICIAL	P. FINAL	P. INICIAL	P. FINAL	P. INICIAL	P. FINAL	P. INICIAL	P. FINAL	P. INICIAL	P. FINAL	P. INICIAL	P. FINAL	P. INICIAL	P. FINAL
ABSI	3,00	2,70	3,0000	2,40	3,0000	2,10	3,0000	1,50	$0,12 \times 10^{-3}$	1,50	3,0000	0,75	2,6671	0,75	2,6671
KSUP	0,750	0,675	0,7499	0,600	0,7499	0,525	0,7499	0,375	0,9950	0,375	0,7500	0,1875	0,1755	0,1875	0,1755
NSAT	600,0	540,0	600,00	480,0	600,00	420,0	600,00	300,0	126,84	300,0	600,00	150,0	594,89	150,0	594,89
CPER	0,300	0,270	0,3000	0,240	0,3000	0,210	0,3000	0,150	0,9144	0,150	0,3000	0,075	0,3042	0,075	0,3042
KPER	0,01500	0,01350	0,01500	0,01200	0,0150	0,01050	0,0150	0,00750	0,9999	0,00750	0,0150	0,00375	0,01521	0,00375	0,01521
KSUB	0,9920	0,8928	0,9919	0,7936	0,9919	0,6944	0,9920	0,4960	0,5647	0,4960	0,9920	0,2480	0,9919	0,2480	0,9919
KARM	0,100	0,090	0,0998	0,080	0,0998	0,070	0,0999	0,050	$0,42 \times 10^{-3}$	0,050	0,0999	0,025	0,7559	0,025	0,7559
VTDH (1)	0,90	0,97	0,8998	0,97	0,8998	0,97	0,8999	0,97	0,7902	0,95	0,8999	0,97	0,9937	0,95	0,9937
VTDH (2)	0,07	0,02	0,0701	0,02	0,0701	0,02	0,0700	0,02	0,2095	0,03	0,0700	0,02	$0,2 \times 10^{-4}$	0,03	$0,2 \times 10^{-4}$
VTDH (3)	0,03	0,01	0,0301	0,01	0,0301	0,01	0,0301	0,01	0,0003	0,02	0,0301	0,01	0,0062	0,02	0,0062
FO	—	$0,16 \times 10^{-5}$	$0,32 \times 10^{-6}$	$0,24 \times 10^{-5}$	$0,36 \times 10^{-6}$	$0,38 \times 10^{-5}$	$0,15 \times 10^{-14}$	$0,97 \times 10^{-5}$	$3,21 \times 10^{-3}$	$0,94 \times 10^{-5}$	$0,15 \times 10^{-10}$	$0,23 \times 10^{-6}$	1,44	$0,23 \times 10^{-6}$	1,44

Em todos os casos foram considerados vários pontos iniciais, representados por desvios de 10%, 20%, 30%, 50% e 75% , para menor, da solução .

No primeiro caso , tabela IV.1, foi considerado o modelo com apenas seis parâmetros, desprezando-se os parâmetros que representam os efeitos de calha . Em todos os casos observou-se convergência para o mínimo global . Alguns destes resultados são apresentados mais detalhadamente no apêndice B .

A tabela IV.2, que mostra os resultados também para o modelo com seis parâmetros, apenas adotando outra série sintética, observa-se convergência para mínimo global em todos os casos, exceto para os desvios de 50% e 75% da solução, onde observou-se convergência para mínimos locais . No caso de desvio de 50%, foi verificada certa tendência do parâmetro KSUP ser maior que um, saindo do espaço viável . No outro, 75%, observou-se esta tendência também para os parâmetros ABSI e KPER, só que para estes dois parâmetros esta tendência foi um pouco mais forte . Este fato pode ser visto analisando os resultados detalhados apresentados no apêndice B .

A tabela IV.3, apresenta os resultados para o modelo, quando são considerados os efeitos de calha . Considerou-se neste caso três ordenadas para o histograma de retardo, representado pelo parâmetro VTDH, totalizando dez parâmetros . Para os parâmetros VTDH, foi adotada uma abordagem diferente com relação aos desvios da solução, já que, o último VTDH, foi tratado como função dos outros dois . Se a abordagem anterior fosse mantida o último VTDH, teria sempre seu valor percentualmente "mais prejudicado" que os outros . Nos casos de desvio de 50% e 75% foram considerados dois conjuntos de valores de VTDH's . Em todos os casos observou-se convergência para o mínimo global,

exceto para um dos casos de desvio de 50% e no caso de desvio de 75% . No caso, de 50%, observou-se uma certa tendência dos parâmetros KSUP e KPER saírem da região viável . No caso de desvio de 75%, que representa um quarto do valor real, verificou-se nos dois casos convergência para o mesmo mínimo local . O valor da função objetivo foi bem pequeno, sendo que o parâmetro KSUB convergiu para o valor correto e os outros tiveram seus valores próximos da solução, com a exceção dos parâmetros KSUP, KARM e VTDH's . Sendo que para o valor do primeiro VTDH notou-se a tendência para ter valor um, e conseqüentemente zero para os outros . No apêndice B são apresentados os resultados detalhados desta aplicação .

Deve-se considerar ainda que nada impede que peculiaridades de uma certa região levem à consideração de um número maior de ordenadas VTDH, para os quais acredita-se que o algoritmo sempre tenha robustez suficiente para encontrar a solução .

Os parâmetros VTDH e KARM, que refletem os efeitos de amortecimento da hidrógrafa de saída devem ser considerados com certo cuidado . A formulação deste fenômeno é tal, que pode levar a multiplicidade de mínimos locais .

Outro dado importante é com relação ao tempo de CPU consumido para processamento, que foi em média de quinze minutos (IBM - 4381) . Este tempo ainda é alto, porém alguns estudos podem ser feitos na tentativa de encontrar um valor ideal para o parâmetro " $\lambda$ " do algoritmo de penalização hiperbólica . Até o momento este parâmetro tem sido aplicado de forma iterativa numa sequência convergente a zero . Talvez a aplicação direta de um valor convenientemente estudado minorasse um pouco este tempo . Deve ainda ser considerado que os tempos mostrados no anexo B são para casos com  $\lambda$  bem pequenos . Em alguns casos com  $\lambda$  um pouco maior já se verificava a convergência .

Ainda com relação ao tempo de CPU, que preocuparia em casos práticos, deve ser considerado também que nem sempre o processo de calibração será feito a partir de um ponto tão crítico quanto ao obtido para um desvio de 75% da solução, como nos casos mais demorados de séries sintéticas .

Com a introdução da função de suavização aparece uma nova variável, o parâmetro "d" (eq. III.39) . Este parâmetro foi acoplado linearmente ao valor do parâmetro " $\lambda$ " da função de suavização . Como o valor de " $\lambda$ " tende a zero, o valor de "d" também convergirá para zero, proporcionando manutenção da integridade física do modelo . Com relação à sensibilidade deste parâmetro sabe-se que o aumento de seu valor, diminui a ocorrência de certos mínimos locais, já que, ele está relacionado com a suavização dada à superfície de resposta .

Finalmente, com relação a convergência para mínimos locais, acredita-se ser impossível sempre se garantir a convergência para mínimos globais . Na verdade os mínimos locais existem e matematicamente o algoritmo de busca aplicado não possui critério que faça distinções entre os mínimos locais e globais .

Os resultados apresentados demonstram o sucesso da metodologia aplicada, em particular se comparados com àqueles apresentados na literatura .

#### IV.2 - CONSIDERAÇÕES SOBRE CASOS REAIS

A análise de casos reais deve ser feita de forma diferente do que a feita para séries sintéticas . Mesmo porque, na aplicação a casos reais acrescentam-se outras fontes de incertezas, como o tamanho da série considerada, a consistência dos dados, a aplicabilidade do modelo à bacia e etc. . Enquanto no caso de séries sintéticas a única fonte de incerteza provinha da calibração do modelo, no caso séries reais atuam vários fatores que perturbam os resultados . Desse modo, é esperado que a fase de calibração do modelo com séries reais encontre maiores dificuldades do que àquela com séries sintéticas .

É conveniente observar que o tema deste trabalho é a verificação da qualidade da calibração . Os efeitos de uma má calibração só são isolados quando séries sintéticas são utilizadas . Nessas condições todos os desvios são creditados à fase da calibração .

Neste sentido este estudo poderia se restringir ao caso de séries sintéticas . No entanto , achou-se conveniente aplicar a metodologia apresentada à um caso real e observar o comportamento do modelo após a suavização .

Para isso, foi escolhida para a aplicação a bacia do rio Pinheirinho, localizada no estado de São Paulo e com 113 Km<sup>2</sup> de área . Foram destacadas séries diárias de duração de dois anos, de precipitações médias, de evaporação, e de vazões .

Partindo de diferentes pontos iniciais, considerando períodos distintos para aquecimento, procedeu-se à calibração automática do modelo, utilizando a metodologia discutida no capítulo III .

O processo otimizador funcionou a contento, já que verificou-se convergência e o valor da função objetivo teve seu valor diminuído . Notou-se que o valor do parâmetro ABSI tende a se localizar próximo à restrição inferior, enquanto que a aplicação para essa mesma bacia feita, por tentativa e erro, pelo autor do modelo forneceu valor de ABSI bem superior .

Analisando o fato, encontrou-se no desequilíbrio de massa um dos principais fatores que poderiam levar a tais circunstâncias . Porém não houve dados disponíveis para que fosse feita uma investigação mais profunda, e assim, com maior segurança pudessem ser feitas certas afirmações .

De qualquer forma considera-se como resultado positivo o bom funcionamento do processo otimizador para o caso real, apesar do desequilíbrio de massa encontrado nos dados . Os resultados dessa simulação encontram-se no apêndice B .

A seguir são apresentados de forma conclusiva os principais avanços que acredita-se tenham sido atingidos e algumas sugestões para futuras pesquisas .

## CAPÍTULO V

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

#### V.1 - CONCLUSÕES

Após a aplicação da técnica de suavização, o processo otimizador, classificado como de segunda ordem, funcionou bem, o que anteriormente não foi verificado na bibliografia conhecida . O que evidencia as descontinuidades como uma fonte de problemas à aplicação destes métodos, como é discutido em HENDRICKSON, SOROOSHIAN E BRAZIL (1988) e ROTUNNO (1989) .

Com a aplicação da técnica de suavização, que tornou possível a aplicação sem restrições teóricas desta classe de métodos para otimização, alguns dos problemas a que estavam sujeitos anteriormente os modelos foram superados ou atenuados .

Com a aplicação de um método tipo Quasi-Newton, o problema de oscilação em torno da linha de talvegue, que aparecem em decorrência do problema de interdependência dos parâmetros fica resolvido .

O problema de escala dos parâmetros ficou solucionado pois a matriz hessiana promove dinamicamente um reescalonamento dos parâmetros .

As regiões de indiferença absoluta, com alguma componente do gradiente nula, comuns às superfícies geradas pela função objetivo, não são mais verificadas, já que, com a aplicação da técnica de suavização todos os elementos do modelo ficam ativos, ou seja, nas estruturas tipo patamar sempre há a produção constante de uma vazão de transbordamento .

O problema de mínimos locais continua sendo verificado . De certa forma este problema deve sempre ser esperado, já que, em nenhuma técnica de programação não linear este problema é superado de forma definitiva .

A integridade física do modelo ficou completamente garantida através do acoplamento linear do parâmetro "d" da equação (III.39) de suavização ao parâmetro " $\lambda$ " do método de Penalizações Hiperbólicas (eq. (III.41)) . A sequência de valores para " $\lambda$ " converge para zero, conseqüentemente os valores de "d" também, e a sequência de modelos chuva-vazão suavizados convergirá ao modelo original .

## V.2 - SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

De acordo com as conclusões apresentadas pode-se observar que além de tornar possível a aplicação de métodos de segunda ordem para a otimização nos processos de calibração automática outros problemas foram também resolvidos, no entanto existem ainda outros caminhos a serem percorridos .

Um assunto interessante é o estudo comparativo do desempenho de vários tipos de funções objetivo, já que o trabalho de calibrar os parâmetros ficou bem mais facilitado e confiável .

A técnica de suavização das descontinuidades, embora tenha sido aplicada ao modelo chuva-vazão SMAP II, certamente poderá ser aplicada e provavelmente com sucesso em outros modelos tipo chuva-vazão, bem como em outros problemas análogos aos que aparecem neste tipo de modelagem .

Com relação ao trabalho aqui apresentado algumas facetas devem ainda ser mais exploradas como a sensibilidade do parâmetro "d" da suavização .



Outro problema que merece atenção é com relação ao tempo de CPU gasto . Estudos devem ser feitos no intuito de melhorar a performance do modelo neste sentido .

A forma de apresentação computacional do modelo acoplado à rotina otimizadora não é a ideal, podendo algo ser feito no intuito de tornar o modelo mais facilmente aplicável pelo usuário, como a inclusão de rotinas gráficas, telas iterativas, configuração da superfície de resposta na região do ponto solução, etc... .

O problema de mínimos locais deve ser melhor analisado posteriormente .

# BIBLIOGRAFIA

- CANEDO, P. M. (1974), "Versão COPPE do TWM para Simulação em Bacias Hidrográficas com Solos Residuais", Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro .
- CANEDO, P. M. (1989), " Hidrologia Superficial ", ABRH, Ed. UFRJ.
- CHOW, V. T. (1964), "Handbook of Applied Hydrology", Mc Graw Hill, N.Y. .
- CLARK, C. O. (1945), " Storage and the Unit Hydrograph ", Proc. Am. Soc. Civil Eng. , no.69, pp. 1419-1447 .
- CLARKE, R. T. (1973), " A Review of Some Mathematical Models Used in Hydrology with Observations on their Calibration and Use ", J. of Hydrology , no.19, pp.1-20 .
- DIB, K. R. (1986), " Manual de Apresentação do Modelo SMAP2", Publicação Interna da Enge-Rio Eng. e Consultoria SA .
- DAWDY, D.R. e O'DONNELL (1965), " Mathematical Models of Catchment Behavior", Journal of The Hydraulics Division, ASCE, Vol. 91, no. HYA, pp. 123-137 .
- FLEMING, G. (1975), " Computer Simulation Techniques in Hydrology ", American Elsevier Publishing Co., Inc., N.Y. .
- FLETCHER, R. e POWELL, M. J. D. (1963), " A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization ", Comput. J., pp. 163-168 .

- GILL P. MURRAY W, WRIGHT M. M., (1981), " Practical Optimization ", Princeton University Press, N.Y. .
- GUPTA, V.K. e SOROOSHIAN, S. (1983) , "Uniqueness and Observability of Conceptual Rainfall-Runoff Model Parameters : The Percolation Process Examined", Water Resour. Res., 19(1), pp. 269-276 .
- GUPTA, V.K. e SOROOSHIAN, S. (1985) , "The Automatic Calibration of Conceptual Catchment Models Using Derivative-Based Optimization Algorithms", Water Resour. Res., 21(4), pp. 473-485 .
- HENDRICKSON, J.D., SOROOSHIAN, S., and BRAZIL, L.E. (1988), "Comparison of Newton-type and Direct Search Algorithms for Calibration of Conceptual Rainfall-Runoff Models", Water Resour. Res., 24 (5), pp 691-700 .
- HOOKE R., and JEEVES T.A. (1961), " Direct Search Solutions of Numerical and Statistical Problems ", Journal Assoc. Comput. Mach., 8(2), pp. 212-229 .
- IBBIT R. P. e O'DONNELL T. (1971), " Fitting Methods for Conceptual Catchment ", Journal Hydraul. Eng., 97(HY9) pp. 1331-1342 .
- JOHNSTON, P.R. e PILGRIM, D. (1976), " Parameter Optimization for Watershed Models, Water Resour. Res., 12(3), pp. 477-486 .
- KITANIDIS, P. K. e BRAS, R. L., (1980), " Real-time Forecasting with a Conceptual Hydrologic Model, 1, Analysis of Uncertainty ", Water Resour. Res., 16(6), pp. 1025-1033 .
- LEVENBERG, K. (1944), " A Method for the Solution of Certain Nonlinear Problems in Least Squares ", Q. Appl. Math., 2, pp.164-168 .

- LOPES, J.E.G., BRAGA, B.P.F., e CONEJO, J.G.L. (1981), "SMAP, a Simplified Hydrologic Model ", International Symposium on Rainfall-Runoff Modeling, Mississippi State University, Mississippi .
- MARQUARDT, D. W. (1963), " An Algorithm for the Least Squares Estimation of Nonlinear Parameters ", SIAM J. 11, pp. 431-441 .
- NELDER J. A. e MEAD R. (1965), " A Simple Method for Function Minimization ", Comp. Journal, 7(4), pp. 309-313 .
- PICKUP, G. (1977), " Testing the Efficiencies of Algorithms and Strategies for Automatic Calibration of Rainfall - Runoff Models ", Hydrol. Sci. Bull., 22(2), pp. 257-274 .
- RESTREPO-POSADA, P. J. e BRAS R. L. (1982), " Automatic Parameter Estimation of a Large Conceptual Rainfall-Runoff Model: A Maximum Likelihood approach ", Rep.267, Dep. of Civ. Eng., Mass. Inst. Technol., Cambridge, Mass. .
- ROSENBROCK, H. H. (1960), " An Automatic Method of Finding the Greatest of Least Value of a Function ", Comp. Journal, 3, pp. 175-184 .
- ROTUNNO, O.C., e CANEDO, P. (1987), " Comparação de Dois Métodos de Otimização de Parâmetros em Modelos Hidrológicos Chuva-Vazão ", Anais do VII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos, Salvador, pp. 469-479 .
- ROTUNNO, O.C. (1989), " Comparação de Dois Métodos de Otimização de Parâmetros em Modelos Hidrológicos Chuva-Vazão, Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro .

- SOROOSHIAN, S. (1981), " Parameter Estimation of Rainfall-Runoff Models with Heteroscedastic Streamflow Errors - The Noninformative Data Case ", J. of Hydrology, 52, pp. 127-138 .
- SOROOSHIAN, S. e DRACUP, J. A. (1980), " Stochastic Parameter Estimation Procedures for Hydrologic Rainfall-Runoff Models: Correlated and Heteroscedastic Error Case ", Water Resour. Res., 16(2), pp. 430-442 .
- SOROOSHIAN, S. e GUPTA, V.K. (1985), "The Analysis of Structural Identifiability : Theory and Application to Conceptual Rainfall-Runoff Models", Water Resour. Res., 21(4), pp. 487-495 .
- TUCCI, C. E. M. (1987), "Modelos Determinísticos", ABRH, Ed. Nobel, Rio de Janeiro .
- TUCCI, C. E. M., SANCHEZ, J. e LOPES, M. O. S. (1981), "Modelo IPH II para Simulação de Precipitação-Vazão na Bacia . Alguns Resultados ", Anais do IV Simpósio Brasileiro de Hidrologia e Recursos Hídricos, Fortaleza.
- U.S. SOIL CONSERVATION SERVICE (1975), "Urban Hydrology for Small Watersheds ", Technical Release n<sup>o</sup> 55, U.S. Department of Agriculture .
- XAVIER, A.E. (1982a), " Penalização Hiperbólica ", Anais do I Congresso Latino Americano de Pesquisa Operacional e Engenharia de Sistemas, Rio de Janeiro, pp. 468-482 .
- XAVIER, A. E. (1982b), " Penalização Hiperbólica: Um Novo Método para Resolução de Problemas de Otimização ", Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro .

## APÊNDICE A

### DETERMINAÇÃO DAS FUNÇÕES DE DERIVADAS

A derivada da função objetivo é dada por :

$$FO = \sum_{t=1}^{t=nobs} (QCAL_t - QOBS_t)^2$$

$$DFO(1..NP) = \sum_{t=1}^{t=nobs} 2 \cdot (QCAL_t - QOBS_t) \cdot DQCAL(1..NP)$$

onde :

nobs - número de observações .

NP - número de parâmetros, sendo :

1 - ABSI

2 - KSUP

3 - NSAT

4 - CPER

5 - KPER

6 - KSUB

7 - KARM

8 em diante - as ordenadas de VTDH

As derivadas da função QCAL, dadas por DQCAL(1..NP), são :

- Em relação a NP e NP = 1..6, e NP = 8..(7+NTDH-1)

$$DQCAL(NP) = KARM \cdot DQCALA(NP) + (1 - KARM) \cdot DQENT(NP)$$

- Em relação à KARM

$$DQCAL(7) = KARM \cdot DQCALA(7) + QCAL_{t-1} + (1 - KARM) \cdot DQENT(7) - QENT_t$$

As derivadas da função QENT são :

- Em relação à ABSI, KSUP, NSAT, CPER, KPER e KSUB

$$DQENT(1..6) = \sum_{I=1}^{I=ntdh} VTDH(I) \cdot DQGER(t+1-I, 1..6)$$

sendo  $t+1-I \geq 1$

- Em relação à KARM :

$$DQENT(7) = 0,0$$

- Em relação aos "ntdh" VTDH's :

Por exemplo se  $ntdh = 3$ , os valores de QENT nos três primeiros instantes seriam :

$$QENT_1 = VTDH(1) \cdot QGER_1$$

$$QENT_2 = VTDH(1) \cdot QGER_2 + VTDH(2) \cdot QGER_1$$

$$QENT_3 = VTDH(1) \cdot QGER_3 + VTDH(2) \cdot QGER_2 + VTDH(3) \cdot QGER_1$$

Como o último VTDH ( VTDH(3) ) é função dos anteriores :

$$QENT_3 = VTDH(1) \cdot QGER_3 + VTDH(2) \cdot QGER_2 + (1 - VTDH(1) - VTDH(2)) \cdot QGER_1$$

A derivada de QENT com relação à VTDH(1), por exemplo, seria

. Em  $t = 1$

$$DQENT(8) = QGER_1$$

. Em  $t = 2$

$$DQENT(8) = QGER_2$$

. Em  $t = 3$

$$DQENT(8) = QGER_3 - QGER_1$$

De forma genérica, teríamos :

$$DQENT(NP) = QGER_{t+8-NP} - QGER_{t+1-ntdh}$$

Onde :

NP varia de 8 até  $(7+NTDH-1)$

e

$$(t+8-NP) \geq 1$$

$$(t+1-NTDH) \geq 1$$

As derivadas da função QGER são :

- Com relação a ABSI

$$QGER_t = QSUP_t + QSUB_t$$

$$QGER_t = NSUPP_t \cdot (1 - K_{SUP}) + NSUBP_t \cdot (1 - K_{SUB})$$

$$DQGER(1) = DNSUPP(1) \cdot (1 - K_{SUP}) + DNSUBP(1) \cdot (1 - K_{SUB})$$



- Com relação a KSUP

$$QGER_t = QSUP_t + QSUB_t$$

$$QGER_t = NSUPP_t \cdot (1 - KSUP) + NSUBP_t \cdot (1 - KSUB)$$

$$DQGER(2) = DNSUPP(2) \cdot (1 - KSUP) + DNSUBP(1) \cdot (1 - KSUB) - NSUPP_t$$

- Com relação a NSAT

$$QGER_t = QSUP_t + QSUB_t$$

$$QGER_t = NSUPP_t \cdot (1 - KSUP) + NSUBP_t \cdot (1 - KSUB)$$

$$DQGER(3) = DNSUPP(3) \cdot (1 - KSUP) + DNSUBP(3) \cdot (1 - KSUB)$$

- Com relação a GPER

$$QGER_t = QSUP_t + QSUB_t$$

$$QGER_t = NSUPP_t \cdot (1 - KSUP) + NSUBP_t \cdot (1 - KSUB)$$

$$DQGER(4) = DNSUPP(4) \cdot (1 - KSUP) + DNSUBP(4) \cdot (1 - KSUB)$$

- Com relação a KPER

$$QGER_t = QSUP_t + QSUB_t$$

$$QGER_t = NSUPP_t \cdot (1 - KSUP) + NSUBP_t \cdot (1 - KSUB)$$

$$DQGER(5) = DNSUPP(5) \cdot (1 - KSUP) + DNSUBP(5) \cdot (1 - KSUB)$$

- Com relação a KSUB

$$QGER_t = QSUP_t + QSUB_t$$

$$QGER_t = NSUPP_t \cdot (1 - KSUP) + NSUBP_t \cdot (1 - KSUB)$$

$$DQGER(6) = DNSUPP(6) \cdot (1 - KSUP) + DNSUBP(6) \cdot (1 - KSUB) - NSUBP_t$$

- Com relação a KARM e VTDH's as derivadas de QGER são nulas .

Para determinação das derivadas das funções NSUPP e NSUBP, há necessidade de derivar as demais funções do modelo, apresentadas abaixo, respeitando a ordem que as funções aparecem no capítulo III . Porém primeiramente optou-se por derivar genericamente a função de suavização e depois seus argumentos com sinal invertido .

### Derivada da função de suavização

A equação (III.39) que é uma hipérbole pode ser reescrita em termos de seus dois semi eixos, a e b conforme mostrado abaixo, segundo XAVIER (1982b) .

$$\phi(x_t, M, d) = \phi(y, a, b) = \frac{ab}{b^2 - a^2} \left[ -y + \sqrt{y^2 + (b^2 - a^2)} \right]$$

onde :

$$y = x_t - M$$

$$a = d \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) - 1}}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{8}\right)}$$

$$b = d \sqrt{\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) - 1}$$

A derivada desta função será então :

$$D\phi = \frac{ab}{b^2 - a^2} \left[ -y' + \frac{1}{2} (y^2 + (b^2 - a^2))^{-1/2} \cdot 2yy' \right]$$

$$D\phi = \frac{ab}{b^2 - a^2} \left[ -1 + \frac{y}{\sqrt{y^2 + (b^2 - a^2)}} \right] y'$$

### Derivadas das demais funções do modelo

#### - Derivadas das funções em relação a ABSI

Considerando  $FUNC2_t = FUNÇÃO(Y2)$ , onde  $Y2 = ABSI - CHUVA_t$

$$DFUNC2(1) = DFUNÇÃO(Y2) \cdot Y2'(1)$$

$$Y2'(1) = 1,0$$

$$DFUNC2(1) = DFUNÇÃO(Y2)$$

$$\text{Fazendo } DEN = FUNC2_t + NSAT - NSOL_{t-1}$$

$$DEN' = DFUNC2(1) - DNSOLA(1)$$

$$\text{Então } QRES_t = FUNC2_t^2 \cdot DEN^{-1}$$

$$DQRES(1) = [2 \cdot FUNC2_t \cdot DFUNÇÃO(Y2) \cdot DEN^{-1}] - \\ - FUNC2_t^2 \cdot DEN^{-2} \cdot [DFUNC2(1) - DNSOLA(1)]$$

$$QINF_t = CHUVA_t - QRES_t$$

$$DQINF(1) = - DQRES(1)$$

Considerando  $FUNC3_t = FUNÇÃO(Y3)$ , onde  $Y3 = EVPT_t - QINF_t$

$$DFUNC3(1) = DFUNÇÃO(Y3) \cdot Y3'(1)$$

$$Y3'(1) = - DQINF(1)$$

$$DFUNC3(1) = DFUNÇÃO(Y3) \cdot (- DQINF(1))$$

Considerando  $FUNC1_t = FUNÇÃO(Y1)$ , ONDE  $Y1 = NSAT - NSOLES$

$$\text{Sendo } NSOLES = NSOL_{t-1} + FUNC3_t$$

$$DNSOLES = DNSOLA(1) + DFUNC3(1)$$

$$DFUNC1(1) = DFUNÇÃO(Y1) \cdot Y1'$$

$$Y1'(1) = - \text{DNSOLES} = - \text{DNSOLA}(1) - \text{DFUNC3}(1)$$

$$\text{DFUNC1}(1) = \text{DFUNÇÃO}(Y1) \cdot [ - \text{DNSOLA}(1) - \text{DFUNC3}(1) ]$$

$$\text{DNSUPP}(1) = \text{DNSUPA}(1) + \text{DQRES}(1) + \text{DFUNC1}(1)$$

$$\text{NSUP}_t = \text{NSUPP}_t - \text{QSUP}_t$$

$$\text{NSUP}_t = \text{NSUPP}_t - \text{NSUPP}_t \cdot (1 - \text{KSUP})$$

$$\text{NSUP}_t = \text{NSUPP}_t \cdot \text{KSUP}$$

$$\text{DNSUP}(1) = \text{KSUP} \cdot \text{DNSUPP}(1)$$

$$\text{DNSOLP}(1) = \text{DNSOLA}(1) + \text{DFUNC3}(1) - \text{DFUNC1}(1)$$

Considerando  $\text{FUNC4}_t = \text{FUNÇÃO}(Y4)$ , onde  $Y4 = \text{QINF}_t - \text{EVPT}_t$

$$\text{DFUNC4}(1) = \text{DFUNÇÃO}(Y4) \cdot Y4'(1)$$

$$Y4'(1) = \text{DQINF}(1)$$

$$\text{DFUNC4}(1) = \text{DFUNÇÃO}(Y4) \cdot \text{DQINF}(1)$$

$$\begin{aligned} \text{DEVPTS}(1) = \text{DFUNC4}(1) \cdot [ \text{NSOLP}_t / \text{NSAT} ] + \text{FUNC4}_t \cdot \\ \cdot [ \text{DNSOLP}(1) / \text{NSAT} ] \end{aligned}$$

Considerando  $\text{FUNC5}_t = \text{FUNÇÃO}(Y5)$ , onde  $Y5 = \text{EVPTS}_t - \text{NSOLP}_t$

$$\text{DFUNC5}(1) = \text{DFUNÇÃO}(Y5) \cdot Y5'(1)$$

$$Y5'(1) = \text{DEVPTS}(1) - \text{DNSOLP}(1)$$

$$\text{DFUNC5}(1) = \text{DFUNÇÃO}(Y5) \cdot [ \text{DEVPTS}(1) - \text{DNSOLP}(1) ]$$

$$\text{DNSOPP}(1) = \text{DFUNC5}(1)$$

Considerando  $FUNC6_t = FUNÇÃO(Y6)$ , onde  $Y6 = NPER - NSOLPP_t$

Sendo  $NPER = CPER \cdot NSAT$

$$DFUNC6(1) = DFUNÇÃO(Y6) \cdot Y6'(1)$$

$$Y6'(1) = - DNSOPP(1)$$

$$DFUNC6(1) = DFUNÇÃO(Y6) \cdot (- DNSOPP(1))$$

$$DQPER(1) = DFUNC6(1) \cdot [NSOLPP_t / NSAT] \cdot KPER + FUNC6_t \cdot [DNSOPP(1) / NSAT] \cdot KPER$$

$$DNSOL(1) = DNSOPP(1) - DQPER(1)$$

$$DNSUBP(1) = DNSUBA(1) + DQPER(1)$$

$$NSUB_t = NSUBP_t - QSUB_t$$

$$NSUB_t = NSUBP_t - NSUBP_t \cdot (1 - KSUB)$$

$$DNSUB(1) = KSUB \cdot DNSUBP(1)$$

- Derivadas em relação à  $KSUP$  :

Considerando  $FUNC2_t = FUNÇÃO(Y2)$ , onde  $Y2 = ABSI - CHUVA_t$

$$DFUNC2(2) = DFUNÇÃO(Y2) \cdot Y2'(2)$$

$$Y2'(2) = 0,0$$

$$DFUNC2(2) = 0,0$$

$$\text{Fazendo } DEN = FUNC2_t + NSAT - NSOL_{t-1}$$

$$DEN' = - DNSOLA(2)$$

$$\text{Então } QRES_t = FUNC2_t^2 \cdot DEN^{-1}$$

$$DQRES(2) = [-FUNC2_t^2 / DEN^2] \cdot [-DNSOLA(2)]$$

$$QINF_t = CHUVA_t - QRES_t$$

$$DQINF(2) = - DQRES(2)$$

Considerando  $FUNC3_t = FUNÇÃO(Y3)$ , onde  $Y3 = EVPT_t - QINF_t$

$$DFUNC3(2) = DFUNÇÃO(Y3) \cdot Y3'(2)$$

$$Y3'(2) = - DQINF(2)$$

$$DFUNC3(2) = DFUNÇÃO(Y3) \cdot (- DQINF(2))$$

Considerando  $FUNC1_t = FUNÇÃO(Y1)$ , ONDE  $Y1 = NSAT - NSOLES$

$$Sendo NSOLES = NSOL_{t-1} + FUNC3(t)$$

$$DNSOLES = DNSOLA(2) + DFUNC3(2)$$

$$Y1'(2) = -DNSOLES = -DNSOLA(2) - DFUNC3(2)$$

$$DFUNC1(2) = DFUNÇÃO(Y1) \cdot Y1'$$

$$DFUNC1(2) = DFUNÇÃO(Y1) [ - DNSOLA(2) - DFUNC3(2) ]$$

$$DNSUPP(2) = DNSUPA(2) + DQRES(2) + DFUNC1(2)$$

$$NSUP_t = NSUPP_t - QSUP_t$$

$$NSUP_t = NSUPP_t - NSUPP_t \cdot (1 - KSUP)$$

$$NSUP_t = NSUPP_t \cdot KSUP$$

$$DNSUP(2) = KSUP \cdot DNSUPP(2) + NSUPP_t$$

$$DNSOLP(2) = DNSOLA(2) + DFUNC3(2) - DFUNC1(2)$$

Considerando  $FUNC4_t = FUNÇÃO(Y4)$ , onde  $Y4 = QINF_t - EVPT_t$

$$DFUNC4(2) = DFUNÇÃO(Y4) \cdot Y4'(2)$$

$$Y4'(2) = DQINF(2)$$

$$DFUNC4(2) = DFUNÇÃO(Y4) \cdot DQINF(2)$$

$$DEVPTS(2) = DFUNC4(2) \cdot [ NSOLP_t / NSAT ] + FUNC4_t \cdot [ DNSOLP(2) / NSAT ]$$

Considerando  $FUNC5_t = FUNÇÃO(Y5)$ , onde  $Y5 = EVPTS_t - NSOLP_t$

$$DFUNC5(2) = DFUNÇÃO(Y5) \cdot Y5'(2)$$

$$Y5'(2) = DEVPTS(2) - DNSOLP(2)$$

$$DFUNC5(2) = DFUNÇÃO(Y5) \cdot [DEVPTS(2) - DNSOLP(2)]$$

$$DNSOPP(2) = DFUNC5(2)$$

Considerando  $FUNC6_t = FUNÇÃO(Y6)$ , onde  $Y6 = NPER - NSOLPP_t$

$$\text{Sendo } NPER = CPER \cdot NSAT$$

$$DFUNC6(2) = DFUNÇÃO(Y6) \cdot Y6'(2)$$

$$Y6'(2) = -DNSOPP(2)$$

$$DFUNC6(2) = DFUNÇÃO(Y6) \cdot (-DNSOPP(2))$$

$$DQPER(2) = DFUNC6(2) \cdot [NSOLPP_t / NSAT] \cdot KPER + FUNC6_t \cdot [DNSOPP(2) / NSAT] \cdot KPER$$

$$DNSOL(2) = DNSOPP(2) - DQPER(2)$$

$$DNSUBP(2) = DNSUBA(2) + DQPER(2)$$

$$NSUB_t = NSUBP_t - QSUB_t$$

$$NSUB_t = NSUBP_t - NSUBP_t \cdot (1 - KSUB)$$

$$DNSUB(2) = KSUB \cdot DNSUBP(2)$$

- Derivadas em relação à NSAT :

Considerando  $FUNC2_t = FUNÇÃO(Y2)$ , onde  $Y2 = ABSI - CHUVA_t$

$$DFUNC2(3) = DFUNÇÃO(Y2) \cdot Y2'(3)$$

$$Y2'(3) = 0,0$$

$$DFUNC2(3) = 0,0$$

$$\text{Fazendo } \text{DEN} = \text{FUNC2}_t + \text{NSAT} - \text{NSOL}_{t-1}$$

$$\text{DEN}' = 1 - \text{DNSOLA}(3)$$

$$\text{Então } \text{QRES}_t = \text{FUNC2}_t^2 \cdot \text{DEN}^{-1}$$

$$\text{DQRES}(3) = \left[ -\text{FUNC2}_t^2 / \text{DEN}^2 \right] \cdot \left[ 1 - \text{DNSOLA}(3) \right]$$

$$\text{QINF}_t = \text{CHUVA}_t - \text{QRES}_t$$

$$\text{DQINF}(3) = -\text{DQRES}(3)$$

$$\text{Considerando } \text{FUNC3}_t = \text{FUNÇÃO}(Y3), \text{ onde } Y3 = \text{EVPT}_t - \text{QINF}_t$$

$$\text{DFUNC3}(3) = \text{DFUNÇÃO}(Y3) \cdot Y3'(3)$$

$$Y3'(3) = -\text{DQINF}(3)$$

$$\text{DFUNC3}(3) = \text{DFUNÇÃO}(Y3) \cdot (-\text{DQINF}(3))$$

$$\text{Considerando } \text{FUNC1}_t = \text{FUNÇÃO}(Y1), \text{ ONDE } Y1 = \text{NSAT} - \text{NSOLES}$$

$$\text{Sendo } \text{NSOLES} = \text{NSOL}_{t-1} + \text{FUNC3}_t$$

$$\text{DNSOLES} = \text{DNSOLA}(3) + \text{DFUNC3}(3)$$

$$\text{DNSOLES} = \text{DNSOLA}(3) + \text{DFUNC3}(3)$$

$$Y1'(3) = 1 - \text{DNSOLES} = 1 - \text{DNSOLA}(3) - \text{DFUNC3}(3)$$

$$\text{DFUNC1}(3) = \text{DFUNÇÃO}(Y1) \cdot Y1'(3)$$

$$\text{DFUNC1}(3) = \text{DFUNÇÃO}(Y1) \cdot \left[ 1 - \text{DNSOLA}(3) - \text{DFUNC3}(3) \right]$$

$$\text{DNSUPP}(3) = \text{DNSUPA}(3) + \text{DQRES}(3) + \text{DFUNC1}(3)$$

$$\text{NSUP}_t = \text{NSUPP}_t - \text{QSUP}_t$$

$$\text{NSUP}_t = \text{NSUPP}_t - \text{NSUPP}_t \cdot (1 - \text{KSUP})$$

$$\text{NSUP}_t = \text{NSUPP}_t \cdot \text{KSUP}$$

$$\text{DNSUP}(3) = \text{KSUP} \cdot \text{DNSUPP}(3)$$

$$\text{DNSOLP}(3) = \text{DNSOLA}(3) + \text{DFUNC3}(3) - \text{DFUNC1}(3)$$



Considerando  $FUNC4_t = FUNÇÃO(Y4)$ , onde  $Y4 = QINF_t - EVPT_t$

$$DFUNC4(3) = DFUNÇÃO(Y4) \cdot Y4'(3)$$

$$Y4'(3) = DQINF(3)$$

$$DFUNC4(3) = DFUNÇÃO(Y4) \cdot DQINF(3)$$

$$DEVPTS(3) = DFUNC4(3) \cdot [NSOLP_t / NSAT] + FUNC4_t \cdot [DNSOLP(3) / NSAT] - FUNC4_t \cdot [NSOLP_t / NSAT^2]$$

Considerando  $FUNC5_t = FUNÇÃO(Y5)$ , onde  $Y5 = EVPTS_t - NSOLP_t$

$$DFUNC5(3) = DFUNÇÃO(Y5) \cdot Y5'(3)$$

$$Y5'(3) = DEVPTS(3) - DNSOLP(3)$$

$$DFUNC5(3) = DFUNÇÃO(Y5) \cdot [DEVPTS(3) - DNSOLP(3)]$$

$$DNSOPP(3) = DFUNC5(3)$$

Considerando  $FUNC6_t = FUNÇÃO(Y6)$ , onde  $Y6 = NPER - NSOLPP_t$

$$E \text{ sendo } NPER = CPER \cdot NSAT$$

$$DFUNC6(3) = DFUNÇÃO(Y6) \cdot Y6'(3)$$

$$Y6'(3) = CPER - DNSOPP(3)$$

$$DFUNC6(3) = DFUNÇÃO(Y6) \cdot (CPER - DNSOPP(3))$$

$$DQPER(3) = DFUNC6(3) \cdot [NSOLPP_t / NSAT] \cdot KPER + FUNC6_t \cdot [DNSOPP(3) / NSAT] \cdot KPER - FUNC6_t \cdot [NSOLPP_t / NSAT^2] \cdot KPER$$

$$DNSOL(3) = DNSOPP(3) - DQPER(3)$$

$$\text{DNSUBP}(3) = \text{DNSUBA}(3) + \text{DQPER}(3)$$

$$\text{NSUB}(t) = \text{NSUBP}(t) - \text{QSUB}(t)$$

$$\text{NSUB}(t) = \text{NSUBP}(t) - \text{NSUBP}(t) \cdot (1 - \text{KSUB})$$

$$\text{DNSUB}(3) = \text{KSUB} \cdot \text{DNSUBP}(3)$$

- Derivadas em relação à CPER :

Considerando  $\text{FUNC2}_t = \text{FUNÇÃO}(Y2)$ , onde  $Y2 = \text{ABSI} - \text{CHUVA}_t$

$$\text{DFUNC2}(4) = \text{DFUNÇÃO}(Y2) \cdot Y2'(4)$$

$$Y2'(4) = 0,0$$

$$\text{DFUNC2}(4) = 0,0$$

$$\text{Fazendo } \text{DEN} = \text{FUNC2}_t + \text{NSAT} - \text{NSOL}_{t-1}$$

$$\text{DEN}' = -\text{DNSOLA}(4)$$

$$\text{Então } \text{QRES}_t = \text{FUNC2}_t^2 \cdot \text{DEN}^{-1}$$

$$\text{DQRES}(4) = \left[ -\text{FUNC2}_t^2 / \text{DEN}^2 \right] \cdot \left[ -\text{DNSOLA}(4) \right]$$

$$\text{QINF}_t = \text{CHUVA}_t - \text{QRES}_t$$

$$\text{DQINF}(4) = -\text{DQRES}(4)$$

Considerando  $\text{FUNC3}_t = \text{FUNÇÃO}(Y3)$ , onde  $Y3 = \text{EVPT}_t - \text{QINF}_t$

$$\text{DFUNC3}(4) = \text{DFUNÇÃO}(Y3) \cdot Y3'(4)$$

$$Y3'(4) = -\text{DQINF}(4)$$

$$\text{DFUNC3}(4) = \text{DFUNÇÃO}(Y3) \cdot (-\text{DQINF}(4))$$

Considerando  $FUNC1_t = FUN\tilde{C}\tilde{A}O(Y1)$ , ONDE  $Y1 = NSAT - NSOLES$

Sendo  $NSOLES = NSOL_{t-1} + FUNC3_t$

$DNSOLES = DNSOLA(4) + DFUNC3(4)$

$Y1'(4) = - DNSOLES = - DNSOLA(4) - DFUNC3(4)$

$DFUNC1(4) = DFUN\tilde{C}\tilde{A}O(Y1) \cdot Y1'(4)$

$DFUNC1(4) = DFUN\tilde{C}\tilde{A}O(Y1) \cdot [ - DNSOLA(4) - DFUNC3(4) ]$

$DNSUPP(4) = DNSUPA(4) + DQRES(4) + DFUNC1(4)$

$NSUP_t = NSUPP_t - QSUP_t$

$NSUP_t = NSUPP_t - NSUPP_t \cdot (1 - KSUP)$

$NSUP_t = NSUPP_t \cdot KSUP$

$DNSUP(4) = KSUP \cdot DNSUPP(4)$

$DNSOLP(4) = DNSOLA(4) + DFUNC3(4) - DFUNC1(4)$

Considerando  $FUNC4_t = FUN\tilde{C}\tilde{A}O(Y4)$ , onde  $Y4 = QINF_t - EVPT_t$

$DFUNC4(4) = DFUN\tilde{C}\tilde{A}O(Y4) \cdot Y4'(4)$

$Y4'(4) = DQINF(4)$

$DFUNC4(4) = DFUN\tilde{C}\tilde{A}O(Y4) \cdot DQINF(4)$

$DEVPTS(4) = DFUNC4(4) \cdot [ NSOLP_t / NSAT ] + FUNC4_t \cdot [ DNSOLP(4) / NSAT ]$

Considerando  $FUNC5_t = FUN\c{C}{A}{O}(Y5)$ , onde  $Y5 = EVPTS_t - NSOLP_t$

$$DFUNC5(4) = DFUN\c{C}{A}{O}(Y5) \cdot Y5'(4)$$

$$Y5'(4) = DEVPTS(4) - DNSOLP(4)$$

$$DFUNC5(4) = DFUN\c{C}{A}{O}(Y5) \cdot [DEVPTS(3) - DNSOLP(3)]$$

$$DNSOPP(4) = DFUNC5(4)$$

Considerando  $FUNC6_t = FUN\c{C}{A}{O}(Y6)$ , onde  $Y6 = NPER - NSOLPP_t$

$$\text{Sendo } NPER = CPER \cdot NSAT$$

$$DFUNC6(4) = DFUN\c{C}{A}{O}(Y6) \cdot Y6'(4)$$

$$Y6'(4) = NSAT - DNSOPP(4)$$

$$DFUNC6(4) = DFUN\c{C}{A}{O}(Y6) \cdot (NSAT - DNSOPP(4))$$

$$DQPER(4) = DFUNC6(4) \cdot [NSOLPP_t / NSAT] \cdot KPER + FUNC6_t \cdot [DNSOPP(4) / NSAT] \cdot KPER$$

$$DNSOL(4) = DNSOPP(4) - DQPER(4)$$

$$DNSUBP(4) = DNSUBA(4) + DQPER(4)$$

$$NSUB_t = NSUBP_t - QSUB_t$$

$$NSUB_t = NSUBP_t - NSUBP_t \cdot (1 - KSUB)$$

$$DNSUB(4) = KSUB \cdot DNSUBP(4)$$

- Derivadas em relação à KPER :

Considerando  $FUNC2_t = FUNÇÃO(Y2)$ , onde  $Y2 = ABSI - CHUVA_t$

$$DFUNC2(5) = DFUNÇÃO(Y2) \cdot Y2'(5)$$

$$Y2'(5) = 0,0$$

$$DFUNC2(5) = 0,0$$

Fazendo  $DEN = FUNC2_t + NSAT - NSOL_{t-1}$

$$DEN' = - DNSOLA(5)$$

Então  $QRES_t = FUNC2_t^2 \cdot DEN^{-1}$

$$DQRES(5) = [- FUNC2_t^2 / DEN^2] \cdot [- DNSOLA(5)]$$

$QINF_t = CHUVA_t - QRES_t$

$$DQINF(5) = - DQRES(5)$$

Considerando  $FUNC3_t = FUNÇÃO(Y3)$ , onde  $Y3 = EVPT_t - QINF_t$

$$DFUNC3(5) = DFUNÇÃO(Y3) \cdot Y3'(5)$$

$$Y3'(5) = - DQINF(5)$$

$$DFUNC3(5) = DFUNÇÃO(Y3) \cdot (- DQINF(5))$$

Considerando  $FUNC1_t = FUNÇÃO(Y1)$ , ONDE  $Y1 = NSAT - NSOLES$

Sendo  $NSOLES = NSOL_{t-1} + FUNC3_t$

$$DNSOLES = DNSOLA(5) + DFUNC3(5)$$

$$DNSOLES = DNSOLA(5) + DFUNC3(5)$$

$$Y1'(5) = - DNSOLES = - DNSOLA(5) - DFUNC3(5)$$

$$DFUNC1(5) = DFUNÇÃO(Y1) \cdot Y1'(5)$$

$$DFUNC1(5) = DFUNÇÃO(Y1) \cdot [- DNSOLA(5) - DFUNC3(5)]$$

$$\text{DNSUP}(5) = \text{DNSUPA}(5) + \text{DQRES}(5) + \text{DFUNC1}(5)$$

$$\text{NSUP}_t = \text{NSUP}_t - \text{QSUP}_t$$

$$\text{NSUP}_t = \text{NSUP}_t - \text{NSUP}_t \cdot (1 - \text{KSUP})$$

$$\text{NSUP}_t = \text{NSUP}_t \cdot \text{KSUP}$$

$$\text{DNSUP}(5) = \text{KSUP} \cdot \text{DNSUP}(5)$$

$$\text{DNSOLP}(5) = \text{DNSOLA}(5) + \text{DFUNC3}(5) - \text{DFUNC1}(5)$$

Considerando  $\text{FUNC4}_t = \text{FUNÇAO}(Y4)$ , onde  $Y4 = \text{QINF}_t - \text{EVPT}_t$

$$\text{DFUNC4}(5) = \text{DFUNÇAO}(Y4) \cdot Y4'(5)$$

$$Y4'(5) = \text{DQINF}(5)$$

$$\text{DFUNC4}(5) = \text{DFUNÇAO}(Y4) \cdot \text{DQINF}(5)$$

$$\begin{aligned} \text{DEVPTS}(5) = \text{DFUNC4}(5) \cdot [ \text{NSOLP}_t / \text{NSAT} ] + \text{FUNC4}_t \cdot \\ \cdot [ \text{DNSOLP}(5) / \text{NSAT} ] \end{aligned}$$

Considerando  $\text{FUNC5}_t = \text{FUNÇAO}(Y5)$ , onde  $Y5 = \text{EVPTS}_t - \text{NSOLP}_t$

$$\text{DFUNC5}(5) = \text{DFUNÇAO}(Y5) \cdot Y5'(5)$$

$$Y5'(5) = \text{DEVPTS}(5) - \text{DNSOLP}(5)$$

$$\text{DFUNC5}(5) = \text{DFUNÇAO}(Y5) \cdot [ \text{DEVPTS}(5) - \text{DNSOLP}(5) ]$$

$$\text{DNSOPP}(5) = \text{DFUNC5}(5)$$

Considerando  $FUNC6_t = FUNÇÃO(Y6)$ , onde  $Y6 = NPER - NSOLPP_t$

E sendo  $NPER = CPER \cdot NSAT$

$$DFUNC6(5) = DFUNÇÃO(Y6) \cdot Y6'(5)$$

$$Y6'(5) = - DNSOPP(5)$$

$$DFUNC6(5) = DFUNÇÃO(Y6) \cdot (- DNSOPP(5))$$

$$DQPER(5) = DFUNC6(5) \cdot [NSOLPP_t / NSAT] \cdot KPER + FUNC6_t \cdot [DNSOPP(5) / NSAT] \cdot KPER + FUNC6_t \cdot [NSOLPP_t / NSAT]$$

$$DNSOL(5) = DNSOPP(5) - DQPER(5)$$

$$DNSUBP(5) = DNSUBA(5) + DQPER(5)$$

$$NSUB_t = NSUBP_t - QSUB_t$$

$$NSUB_t = NSUBP_t - NSUBP_t \cdot (1 - KSUB)$$

$$DNSUB(5) = KSUB \cdot DNSUBP(5)$$

- Derivadas em relação à  $KSUB$  :

Considerando  $FUNC2_t = FUNÇÃO(Y2)$ , onde  $Y2 = ABSI - CHUVA_t$

$$DFUNC2(6) = DFUNÇÃO(Y2) \cdot Y2'(6)$$

$$Y2'(6) = 0,0$$

$$DFUNC2(6) = 0,0$$

Fazendo  $DEN = FUNC2_t + NSAT - NSOL_{t-1}$

$$DEN' = - DNSOLA(6)$$

Então  $QRES_t = FUNC2_t^2 \cdot DEN^{-1}$

$$DQRES(6) = [-FUNC2_t^2 / DEN^2] \cdot [-DNSOLA(6)]$$

$QINF_t = CHUVA_t - QRES_t$

$$DQINF(6) = - DQRES(6)$$

Considerando  $FUNC3_t = FUN\c{C}{A}{O}(Y3)$ , onde  $Y3 = EVPT_t - QINF_t$

$$DFUNC3(6) = DFUN\c{C}{A}{O}(Y3) \cdot Y3'(6)$$

$$Y3'(6) = - DQINF(6)$$

$$DFUNC3(6) = DFUN\c{C}{A}{O}(Y3) \cdot (- DQINF(6))$$

Considerando  $FUNC1_t = FUN\c{C}{A}{O}(Y1)$ , ONDE  $Y1 = NSAT - NSOLES$

$$Sendo NSOLES = NSOL_{t-1} + FUNC3_t$$

$$DNSOLES = DNSOLA(6) + DFUNC3(6)$$

$$DNSOLES = DNSOLA(6) + DFUNC3(6)$$

$$Y1'(6) = - DNSOLES = - DNSOLA(6) - DFUNC3(6)$$

$$DFUNC1(6) = DFUN\c{C}{A}{O}(Y1) \cdot Y1'(6)$$

$$DFUNC1(6) = DFUN\c{C}{A}{O}(Y1) \cdot [-DNSOLA(6) - DFUNC3(6)]$$

$$DNSUPP(6) = DNSUPA(6) + DQRES(6) + DFUNC1(6)$$

$$NSUP_t = NSUPP_t - QSUP_t$$

$$NSUP_t = NSUPP_t - NSUPP_t \cdot (1 - KSUP)$$

$$NSUP_t = NSUPP_t \cdot KSUP$$

$$DNSUP(6) = KSUP \cdot DNSUPP(6)$$



$$\text{DNSOLP}(6) = \text{DNSOLA}(6) + \text{DFUNC3}(6) - \text{DFUNC1}(6)$$

Considerando  $\text{FUNC4}_t = \text{FUNÇÃO}(Y4)$ , onde  $Y4 = \text{QINF}_t - \text{EVPT}_t$

$$\text{DFUNC4}(6) = \text{DFUNÇÃO}(Y4) \cdot Y4'(6)$$

$$Y4'(6) = \text{DQINF}(6)$$

$$\text{DFUNC4}(6) = \text{DFUNÇÃO}(Y4) \cdot \text{DQINF}(6)$$

$$\begin{aligned} \text{DEVPTS}(6) = & \text{DFUNC4}(6) \cdot [\text{NSOLP}_t / \text{NSAT}] + \text{FUNC4}_t \cdot \\ & \cdot [\text{DNSOLP}(6) / \text{NSAT}] \end{aligned}$$

Considerando  $\text{FUNC5}_t = \text{FUNÇÃO}(Y5)$ , onde  $Y5 = \text{EVPTS}_t - \text{NSOLP}_t$

$$\text{DFUNC5}(6) = \text{DFUNÇÃO}(Y5) \cdot Y5'(6)$$

$$Y5'(6) = \text{DEVPTS}(6) - \text{DNSOLP}(6)$$

$$\text{DFUNC5}(6) = \text{DFUNÇÃO}(Y5) \cdot [\text{DEVPTS}(6) - \text{DNSOLP}(6)]$$

$$\text{DNSOPP}(6) = \text{DFUNC5}(6)$$

Considerando  $\text{FUNC6}_t = \text{FUNÇÃO}(Y6)$ , onde  $Y6 = \text{NPER} - \text{NSOLPP}_t$

$$\text{E sendo } \text{NPER} = \text{CPER} \cdot \text{NSAT}$$

$$\text{DFUNC6}(6) = \text{DFUNÇÃO}(Y6) \cdot Y6'(6)$$

$$Y6'(6) = -\text{DNSOPP}(6)$$

$$\text{DFUNC6}(6) = \text{DFUNÇÃO}(Y6) \cdot (-\text{DNSOPP}(6))$$

$$\begin{aligned} \text{DQPER}(6) = & \text{DFUNC6}(6) \cdot [\text{NSOPP}_t / \text{NSAT}] \cdot \text{KPER} + \text{FUNC6}_t \cdot \\ & \cdot [\text{DNSOPP}(6) / \text{NSAT}] \cdot \text{KPER} \end{aligned}$$

$$\text{DNSOL}(6) = \text{DNSOPP}(6) - \text{DQPER}(6)$$

$$\text{DNSUBP}(6) = \text{DNSUBA}(6) + \text{DQPER}(6)$$

$$\text{NSUB}_t = \text{NSUBP}_t - \text{QSUB}_t$$

$$\text{NSUB}_t = \text{NSUBP}_t - \text{NSUBP}_t \cdot (1 - \text{KSUB})$$

$$\text{DNSUB}(6) = \text{KSUB} \cdot \text{DNSUBP}(6) + \text{NSUBP}_t$$

- As derivadas de NSUP e NSUB em relação aos parâmetros KARM e VTDH's são nulas .

## APÊNDICE B

### RESULTADOS PARCIAIS

#### SÉRIE SINTÉTICA COM SEIS PARÂMETROS

**SOLUÇÃO : ABSI = 5,00    KSUP = 0,70    NSAT = 300,0**  
**CPER = 0,30    KPER = 0,0080    KSUB = 0,950**

sendo  $\lambda$  parâmetro da função de penalização

TABELA B-1

conj. par. iniciais(-20%)	$\lambda=1000$	$\lambda=100$	$\lambda=10$	$\lambda=1,0$	$\lambda=0.1$
ABSI=4,0000	4,7870	5,0010	5,0000	5,0000	5,0000
KSUP=0,5600	0,6884	0,6996	0,6999	0,6999	0,6999
NSAT=240,000	309,399	300,217	300,002	300,002	300,00
CPER=0,2400	0,9182	0,9004	0,9000	0,9000	0,9000
KPER=0,0064	0,0075	0,0080	0,0080	0,0080	0,0080
KSUB=0,7600	0,9599	0,9500	0,9499	0,9499	0,9499
F. OBJ=0,12x10 <sup>5</sup>	0,367x10 <sup>2</sup>	0,139	,54x10 <sup>-4</sup>	,51x10 <sup>-5</sup>	,5x10 <sup>-12</sup>

TABELA B-2

conj. par. iniciais(-75%)	$\lambda=1000$	$\lambda=100$	$\lambda=10$	$\lambda=1,0$	$\lambda=0,1$
ABSI=1,2500	4,9706	5,0006	5,0000	5,0000	5,0000
KSUP=0,1750	0,6977	0,6999	0,6999	0,6999	0,6999
NSAT=75,000	301,759	300,023	300,023	300,000	300,00
CPER=0,0750	0,3048	0,3000	0,3000	0,3000	0,3000
KPER=0,0020	0,0080	0,0080	0,0080	0,0080	0,0080
KSUB=0,2375	0,9503	0,9499	0,9499	0,9499	0,9499
F. OBJ=0,18x10 <sup>6</sup>	2,505	0,373x10 <sup>-2</sup>	,45x10 <sup>-3</sup>	,5x10 <sup>-10</sup>	,5x10 <sup>-11</sup>

**SOLUÇÃO : ABSI - 8,30    KSUP - 0,82    NSAT - 760,0**  
**CPER = 0,30    KPER = 0,0120    KSUB = 0,992**

sendo  $\lambda$  parâmetro da função de penalização

TABELA B-3

conj. par. iniciais(-20%)	$\lambda=1000$	$\lambda=100$	$\lambda=10$	$\lambda=1,0$	$\lambda=0,1$
ABSI=6,6400	6,6426	7,7174	8,3000	8,2999	8,2999
KSUP=0,0560	0,8495	0,8158	0,8199	0,8200	0,8200
NSAT=608,000	608,001	830,950	760,006	760,000	760,00
CPER=0,2400	0,358x10 <sup>19</sup>	0,0199	0,3000	0,2999	0,2999
KPER=0,0096	0,0079	0,0057	0,0119	0,0119	0,0119
KSUB=0,7936	0,9785	0,9882	0,9920	0,9919	0,9919
F. OBJ=0,25x10 <sup>5</sup>	0,750x10 <sup>4</sup>	0,330x10 <sup>2</sup>	,43x10 <sup>-6</sup>	,9x10 <sup>-10</sup>	,7x10 <sup>-10</sup>

TABELA B-4

conj. par. iniciais(-50%)	$\lambda=1000$	$\lambda=100$	$\lambda=10$	$\lambda=1,0$	$\lambda=0,1$
ABSI=4,1500	0,6586	6,0314	6,0011	6,0048	6,0048
KSUP=0,4100	0,9949	0,9949	0,9949	0,9949	0,9949
NSAT=980,000	313,489	272,484	272,836	272,808	272,808
CPER=0,1500	0,2565	0,0328	0,0200	0,0194	0,0194
KPER=0,0060	0,0074	0,0076	0,0075	0,0075	0,0075
KSUB=0,4960	0,9949	0,9948	0,9948	0,9948	0,9948
F. OBJ=0,10x10 <sup>6</sup>	0,208x10 <sup>4</sup>	0,207x10 <sup>4</sup>	,20x10 <sup>4</sup>	,20x10 <sup>4</sup>	0,2x10 <sup>4</sup>

TABELA B-5

conj. par. iniciais(-75%)	$\lambda=1000$	$\lambda=100$	$\lambda=10$	$\lambda=1,0$	$\lambda=0,1$
ABSI=2,0750	9,9094	9,9094	9,9989	9,9998	9,9999
KSUP=0,2050	0,9895	0,9895	0,9903	0,9903	0,9903
NSAT=190,000	433,611	433,611	420,764	420,789	420,789
CPER=0,0750	0,6552	0,6552	0,6558	0,6558	0,6558
KPER=0,0030	0,9774	0,9774	0,9997	0,9999	0,9999
KSUB=0,2480	0,9958	0,9958	0,9958	0,9958	0,9958
F. OBJ=0,26x10 <sup>6</sup>	0,204x10 <sup>4</sup>	0,204x10 <sup>4</sup>	,20x10 <sup>4</sup>	,20x10 <sup>4</sup>	,20x10 <sup>4</sup>

SÉRIE SINTÉTICA COM DEZ PARÂMETROS

SOLUÇÃO: ABSI = 3,00    KSUP = 0,75    NSAT = 600,0  
 CPER = 0,30    KPER = 0,015    KSUB = 0,992  
 KARM = 0,10    VTDH(1) = 0,90    VTDH(2) = 0,07  
 VTDH(3) = 0,03

sendo  $\lambda$  parâmetro da função de penalização

TABELA B-6

conj. par. iniciais(-20%)	$\lambda=1000$	$\lambda=100$	$\lambda=10$	$\lambda=1,0$	$\lambda=0,1$
ABSI=2,4000	2,4003	3,0063	3,0000	3,0000	3,0000
KSUP=0,6000	0,7845	0,7498	0,7499	0,7499	0,7499
NSAT=480,000	480,000	600,131	600,001	600,001	600,001
CPER=0,2400	$0,25 \times 10^{-3}$	0,3002	0,3000	0,3000	0,3000
KPER=0,0120	$0,91 \times 10^{-2}$	0,0150	0,0150	0,0150	0,0150
KSUB=0,7936	0,9771	0,9920	0,9920	0,9919	0,9919
KARM=0,0800	0,1316	0,0917	0,0998	0,0998	0,0998
VTDH <sub>1</sub> =0,9700	0,8816	0,8917	0,8998	0,8998	0,8998
VTDH <sub>2</sub> =0,0200	0,0121	0,0765	0,0701	0,0701	0,0701
VTDH <sub>3</sub> =0,0100	0,1069	0,0318	0,0301	0,0301	0,0301
F. OBJ=0,24x10 <sup>5</sup>	$0,714 \times 10^4$	$0,141 \times 10^{-2}$	$,19 \times 10^{-6}$	$,36 \times 10^{-6}$	$,3 \times 10^{-6}$

TEMPO DE CPU = 12,46 MINUTOS

TABELA B-7

conj. par. iniciais(-50%)	$\lambda=1000$	$\lambda=100$	$\lambda=10$	$\lambda=1,0$	$\lambda=0.1$
ABSI=1,5000	$0,154 \times 10^{-1}$	$0,128 \times 10^{-2}$	$,12 \times 10^{-3}$	-	-
KSUP=0,3750	0,9948	0,9950	0,9950	-	-
NSAT=300,000	160,130	126,997	126,846	-	-
CPER=0,1500	0,9134	0,9142	0,9144	-	-
KPER=0,0075	0,9903	0,9990	0,9999	-	-
KSUB=0,4960	0,5375	0,5640	0,5647	-	-
KARM=0,0500	0,0974	0,0041	$,42 \times 10^{-3}$	-	-
VTDH <sub>1</sub> =0,9700	0,8905	0,7925	0,7902	-	-
VTDH <sub>2</sub> =0,0200	0,1520	0,2055	0,2095	-	-
VTDH <sub>3</sub> =0,0100	0,0175	0,0020	0,0003	-	-
F.OBJ=0,97x10 <sup>5</sup>	$0,295 \times 10^4$	$0,320 \times 10^4$	$0,3 \times 10^4$	-	-

TABELA B-8

conj. par. iniciais(-50%)	$\lambda=1000$	$\lambda=100$	$\lambda=10$	$\lambda=1,0$	$\lambda=0.1$
ABSI=1,5000	3,2106	3,0029	3,0029	3,000	3,0000
KSUP=0,3750	0,7392	0,7499	0,7499	0,7500	0,7500
NSAT=300,000	605,959	600,043	600,043	600,000	600,00
CPER=0,1500	0,3101	0,3001	0,3001	0,3000	0,3000
KPER=0,0075	0,0151	0,0150	0,0150	0,0150	0,0150
KSUB=0,4960	0,9921	0,9920	0,9919	0,9920	0,9920
KARM=0,0500	0,0874	0,0893	0,0893	0,0999	0,0999
VTDH <sub>1</sub> =0,9500	0,8688	0,8896	0,8896	0,8999	0,8999
VTDH <sub>2</sub> =0,0300	0,0819	0,0784	0,0784	0,0700	0,0700
VTDH <sub>3</sub> =0,0200	0,0493	0,0320	0,0320	0,0301	0,0301
F.OBJ=0,94x10 <sup>5</sup>	1,3660	$0,555 \times 10^{-3}$	$0,7 \times 10^{-3}$	$,1 \times 10^{-10}$	$,1 \times 10^{-10}$

TEMPO DE CPU = 21,21 MINUTOS

TABELA B-9

conj. par. iniciais(-75%)	$\lambda=1000$	$\lambda=100$	$\lambda=10$	$\lambda=1,0$	$\lambda=0.1$
ABSI=0,7500	2,7259	2,6624	2,6624	2,6671	2,6671
KSUP=0,1875	0,0792	0,1361	0,1361	0,1759	0,1755
NSAT=150,000	596,158	594,780	594,780	594,897	594,898
CPER=0,0750	0,3074	0,3044	0,3044	0,3042	0,3042
KPER=0,00375	0,01529	0,01521	0,01521	0,01521	0,01521
KSUB=0,2480	0,9919	0,9919	0,9919	0,9919	0,9919
KARM=0,0250	0,7526	0,7562	0,7562	0,7559	0,7559
VTDH <sub>1</sub> =0,9700	0,8778	0,9497	0,9497	0,9935	0,9937
VTDH <sub>2</sub> =0,0200	0,0897	0,0354	0,0354	$0,2 \times 10^{-3}$	$0,2 \times 10^{-4}$
VTDH <sub>3</sub> =0,0100	0,0385	0,0149	0,0149	0,0062	0,0062
F.OBJ=0,29x10 <sup>6</sup>	1,296	1,463	1,467	1,445	1,444

TEMPO DE CPU = 28,75 MINUTOS

TABELA B-10

conj. par. iniciais(-75%)	$\lambda=1000$	$\lambda=100$	$\lambda=10$	$\lambda=1,0$	$\lambda=0.1$
ABSI=0,7500	2,7259	2,6624	2,6624	2,6671	2,6671
KSUP=0,1875	0,0792	0,1361	0,1361	0,1759	0,1755
NSAT=150,000	596,158	594,780	594,780	594,897	594,898
CPER=0,0750	0,3074	0,3044	0,3044	0,3042	0,3042
KPER=0,00375	0,01529	0,01521	0,01521	0,01521	0,01521
KSUB=0,2480	0,9919	0,9919	0,9919	0,9919	0,9919
KARM=0,0250	0,7526	0,7562	0,7562	0,7559	0,7559
VTDH <sub>1</sub> =0,9500	0,8778	0,9497	0,9497	0,9935	0,9937
VTDH <sub>2</sub> =0,0900	0,0897	0,0354	0,0354	$0,2 \times 10^{-3}$	$0,2 \times 10^{-4}$
VTDH <sub>3</sub> =0,0200	0,0385	0,0149	0,0149	0,0062	0,0062
F.OBJ=0,29x10 <sup>6</sup>	1,296	1,463	1,467	1,445	1,444



CASO REAL

Local: Bacia do Rio Pinheirinho

Área da Bacia: 113 Km<sup>2</sup>

Somatório das precipitações observadas: 2724,70 mm

Somatório da evaporação potencial observada: 2964,20 mm

Somatório das vazões observadas: 789,57 mm

RESULTADOS ENCONTRADOS PELO AUTOR DO MODELO :

ABSI = 8,00                      CPER = 0,500

KSUP = 0,74                      KPER = 0,019

NSAT = 500,                      KSUB = 0,993

Valor da função objetivo : 546,51 (p. aquecimento: 60 dias)

363,80 (p. aquecimento: 150 dias)

RESULTADOS DA CALIBRAÇÃO AUTOMÁTICA COM O MODELO SUAVIZADO

Restringindo o espaço viável para:

(sugerido pelo autor do modelo)

3,00 < ABSI < 10,0

0,70 < KSUP < 0,85

400, < NSAT < 800

0,35 < CPER < 0,50

0,001 < KPER < 0,020

0,950 < KSUB < 0,993

Período de aquecimento: 60 dias

Parâmetros	val. iniciais	val. finais
ABSI	7,00	3,00
KSUP	0,80	0,85
NSAT	500,	442,
CPER	0,45	0,35
KPER	0,0105	0,020
KSUB	0,9715	0,991
valor da f.obj.	418,75	285,11

Parâmetros	val. iniciais	val. finais
ABSI	9,00	3,00
KSUP	0,84	0,85
NSAT	750,	442,
CPER	0,49	0,35
KPER	0,0190	0,020
KSUB	0,9920	0,991
valor da f.obj.	651,38	285,11

Período de aquecimento: 150 dias

Parâmetros	val. iniciais	val. finais
ABSI	7,00	3,00
KSUP	0,80	0,85
NSAT	500,	466,
CPER	0,45	0,35
KPER	0,0105	0,020
KSUB	0,9715	0,991
valor da f.obj.	278,46	163,73

Parâmetros	val. iniciais	val. finais
ABSI	9,00	3,00
KSUP	0,84	0,85
NSAT	750,	466,
CPER	0,49	0,35
KPER	0,0190	0,020
KSUB	0,9920	0,991
valor da f.obj.	398,15	163,73